This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

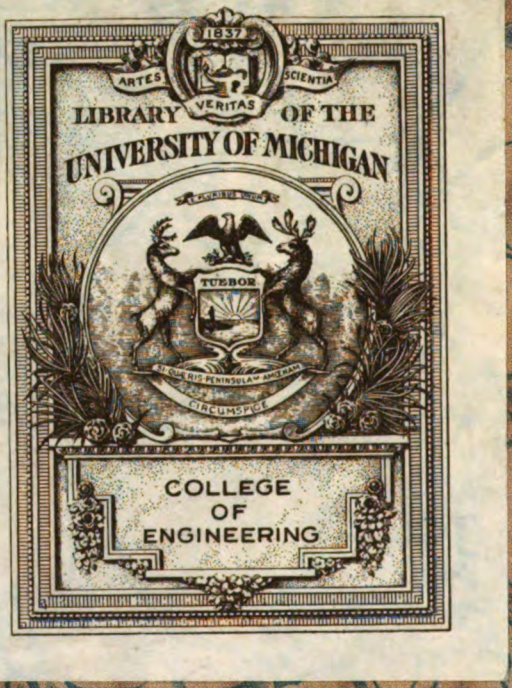
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 417308

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Engineering
TK
6161
.P79

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

INTRODUCTION A LA THÉORIE

DES

COURANTS TÉLÉPHONIQUES

ET DE LA

RADIOTÉLÉGRAPHIE

Digitized by Google

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
60288 55, quai des Grands-Augustins.

Digitized by Google

BIBLIOTHÈQUE DES ANNALES DES POSTES, TÉLÉGRAPHES ET TÉLÉPHONES

INTRODUCTION A LA THÉORIE

DES

COURANTS TÉLÉPHONIQUES

ET DE LA

RADIOTÉLÉGRAPHIE

PAR

J.-B. POMEY

INGÉNIEUR EN CHEF DES TÉLÉGRAPHES

AVEC UNE PRÉFACE

DE

A. BLONDEL

MEMBRE DE L'INSTITUT.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1920

Digitized by Google

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

Digitized by Google

PRÉFACE.

L'Ouvrage que M. Pomey a bien voulu me demander de présenter aujourd'hui aux lecteurs fait suite au Traité qu'il a publié en 1914 sur l'Électricité théorique et qui a obtenu auprès du public scientifique un légitime succès. Il résulte d'une série de leçons professées par l'auteur aux élèves ingénieurs des Postes et Télégraphes pour les initier aux méthodes de calcul modernes et aux problèmes les plus importants de leur carrière.

Successeur de Vaschy dans l'enseignement de l'Électricité théorique à l'École supérieure des Postes et Télégraphes, M. Pomey a d'abord suivi les idées de son éminent et regretté prédécesseur, puis les a soumises à une certaine critique, et les a enfin développées dans des voies nouvelles par des recherches personnelles dont plusieurs sont fort intéressantes. Ce travail d'ensemble qui a été exposé en détail dans son *Cours d'Électricité théorique*, présenté par M. Lecornu qui en a signalé toute la valeur, M. Pomey a cru avec raison utile et intéressant d'en rédiger un *résumé* d'ensemble plus concis et qui en fait ressortir le mieux possible l'enchaînement logique. Il constitue la première Partie de ce Livre.

On y retrouvera sous une forme nouvelle plusieurs résultats nouveaux dus à M. Pomey.

Un des plus intéressants c'est l'énoncé particulièrement clair du théorème de Vaschy sous la forme analytique simple

$$\mathbf{H} = \text{grad } \mathbf{V} + \text{rot } \mathbf{A}.$$

M. Pomey a complété l'application du principe de l'action et de la réaction par une formule qui en permet l'application simple et qui rend intuitive l'expression des tensions et des pressions du champ électrodynamique.

Digitized by Google

Il a surtout complété d'une manière remarquable la théorie de la polarisation électrique ou magnétique. Tandis que William Thomson part des masses pour aboutir à l'expression du potentiel magnétique, l'auteur a montré que l'expérimentation faite d'une manière méthodique dans trois cavités en forme de disques normaux à trois directions rectangulaires, et dans trois canaux parallèles à cette direction, permettrait de déterminer les vecteurs B, H et d'en déduire un vecteur I qui, en partant d'un calcul simple, peut être considéré comme l'intensité de la polarisation. Par sa rigueur irréprochable, cette théorie présente une grande importance.

On peut signaler également le calcul de M. Pomey relatif au travail des forces électrodynamiques. Poincaré a établi autrefois l'expression de l'énergie électrostatique par un calcul très général du travail de déplacement des charges de l'énergie électrostatique. M. Pomey traite d'une façon analogue les courants au lieu des charges, en remplaçant le calcul scalaire de Poincaré par un calcul vectoriel; les courants étant définis par $\frac{\mathrm{rot}\,H}{4\pi}$, alors que les charges sont définies par $\mathrm{div}\,P$.

Ce calcul est assez délicat puisque le système n'est plus conservatif et que le travail élémentaire et l'accroissement de la force vive du mécanisme imaginé par Maxwell (les intensités de courant étant représentées par des vitesses) conduisent à l'expression de l'énergie cinétique, c'est-à-dire magnétique, du système.

M. Pomey a cherché également à compléter les idées de Maxwell en donnant des lois d'Ohm et de Kirchhoff une interprétation mécanique; toujours préoccupé de transposer dans le domaine de l'Électricité les théorèmes de la Mécanique, il a évalué le nombre des variables indépendantes, appliqué aux circuits qui régissent les équations de Lagrange; les résultats auxquels il est arrivé présentent un réel intérêt.

On pourrait citer encore d'autres points de vue originaux dans la partie théorique de l'Ouvrage, mais ce n'est cependant pas là son but principal qui, comme son titre l'indique, est écrit surtout en vue de préparer, au point de vue de la Physique mathématique, les ingénieurs à l'étude de la propagation des *courants téléphoniques* et à l'étude de la *radiotélégraphie*.

Digitized by Google

A ce point de vue, l'Ouvrage de M. Pomey vient combler de la façon la plus heureuse une lacune de la littérature technique et scientifique française; non seulement parce qu'il fait connaître aux lecteurs des questions que l'on ne trouvait jusqu'ici que dans les Mémoires originaux épars dans les Revues étrangères, mais encore parce qu'il initie le lecteur à des disciplines encore mal connues de la plupart des ingénieurs. C'est un vrai cours supérieur (les Anglo-Saxons diraient un *advanced course*) sur la physique spéciale des télécommunications.

Les sujets traités sont inspirés d'abord de la *Télégraphie théorique* de Breisig (à laquelle peu d'emprunts ont été faits), puis des méthodes symboliques de Heaviside et des travaux de Pupin. L'auteur a choisi dans Heaviside le Chapitre qui donne une explication physique de la formule de Fourier; il lui a emprunté aussi la notion de réflexion des ondes dans les lignes. A Pupin, il a emprunté le calcul fondamental donnant l'équidistance des bobines qui permettent d'améliorer la transmission téléphonique. Il donne la démonstration d'un grand nombre de résultats utiles et de formules, les unes qu'on trouve dans les formulaires (formules d'Euler relatives aux pièces chargées de bout, chaînette, capacités, coefficients de self-inductance, etc.), d'autres qui sont nouvelles comme la formule de Pleijel pour le coefficient d'affaiblissement d'une ligne pupinisée, etc. Toutes sont fort utiles même pour le praticien.

Bien que, dans son ensemble, l'Ouvrage soit consacré à des sujets dont les solutions sont déjà connues, on reconnaîtra vite à la lecture que la méthode d'exposition est bien personnelle à l'auteur, et tout à fait française par la précision et la logique; c'est ce qui en fait l'unité et la nouveauté.

M. Pomey est, par tempérament et par habitude d'enseignement, un mathématicien et un interrogateur. Aussi aborde-t-il toutes les questions, comme s'il s'agissait d'un problème posé à un examen d'une de nos Facultés. Cette méthode, qui conduit à des solutions d'une forme algébrique, ne met peut-être pas toujours en évidence les réalités physiques qui sont à l'état latent dans ses calculs. Mais l'effort d'interprétation qu'elle laisse à faire au lecteur est extrêmement

Digitized by Google

éducatif. Et d'ailleurs, pour ce motif, l'auteur a considéré son travail comme une *introduction* aux applications physiques.

Chemin faisant, l'auteur passe en revue toutes les méthodes de calcul et les théories utiles à l'ingénieur sur les fonctions harmoniques, les oscillations périodiques, la synchronisation, les décharges oscillantes et, comme hors-d'œuvre, les théorèmes sur les puissances active et réactive (1).

Tout l'essentiel des méthodes de calcul et des résultats relatifs à la propagation des courants (2), à la téléphonie, à la pupinisation, est exposé sous une forme magistrale, en même temps qu'originale et rendra les plus grands services (3).

Il en est de même du calcul des antennes de télégraphie sans fil au point de vue mécanique aussi bien qu'au point de vue électrique; de la théorie de la génération et de l'émission par les postes à étincelles musicales ou à ondes entretenues, et des circuits oscillants employés en radiotélégraphie (4).

Si l'auteur a pu être aussi documenté sur les questions de radio-

---

(1) Les propriétés de la puissance réactive ont un réel intérêt philosophique, bien que l'ingénieur arrive plus directement à la solution des problèmes, en calculant les forces électromotrices et les courants par les équations de Kirchhoff en notations symboliques.

C'est pourquoi, au siècle dernier, on a établi la formule de la force électromotrice induite, déduite de la conservation de l'énergie; les puissances actives et réactives des courants alternatifs sont des variables de fréquence double de celle des courants et des forces électromotrices à calculer.

(2) En ce qui concerne la Radiotélégraphie, l'auteur, obligé de se limiter, a laissé provisoirement de côté les lampes à vide à trois électrodes; mais ce nouveau sujet est devenu déjà tellement vaste qu'il valait mieux ne pas le déflorer et le réserver pour un exposé ultérieur.

(3) Il suffit d'ailleurs de comparer les exposés de M. Pomey à ceux de Vaschy, constamment alourdis par l'emploi des six équations de Maxwell, pour se rendre compte de la clarté qu'introduit la notation vectorielle; on me permettra d'être moins convaincu de la clarté des notations *symboliques* (qu'il ne faut pas confondre avec les notations *complexes*) et de préférer, pour éviter toute erreur d'application, l'emploi des méthode et écriture classiques pour la solution des équations différentielles.

(4) Dans l'étude de la propagation, M. Pomey a évité l'emploi de l'équation des télégraphistes très élégamment en ramenant tout à la propagation du courant harmonique; la solution qu'il a développée est inattaquable au point de vue analytique; si elle ne satisfait peut-être pas autant les physiciens qui voient moins clairement que lui sous les symboles les réalités physiques, elle augmente fort utilement le bagage scientifique du lecteur.

Digitized by Google

télégraphie, c'est grâce aux fonctions qu'il a remplies pendant la guerre, à la Radiotélégraphie militaire, et dans lesquelles, au risque de blesser la modestie de M. Pomey, il me sera permis de dire qu'il a fait preuve, soit à Salonique, soit à Paris, des plus hautes qualités de technicien, en même temps que du plus complet dévouement patriotique; adjoint pendant la dernière partie de la guerre au général Ferrié, directeur technique de la Radiotélégraphie militaire, il a pu profiter des encouragements qu'il a reçus de ce chef éminent, et du milieu intellectuel remarquable, que ce dernier avait su créer et diriger et qui a rendu tant de services à la Défense nationale, et aux recherches connexes d'ordre scientifique.

Au point de vue des procédés de démonstration, on ne sera pas étonné que le présent Ouvrage, écrit par un professionnel de la Mécanique rationnelle, ait recours à l'emploi systématique des équations de Lagrange et à la transposition dans le domaine de l'Électricité des propriétés bien connues de la Mécanique rationnelle; cette analogie n'est jamais perdue de vue; l'énergie magnétique est assimilée à la force vive; un flux magnétique à une quantité de mouvement; une force électromotrice d'induction à une force d'inertie; la loi de conservation de la charge électrique à une liaison imposée au système, etc. Cette symétrie est constamment mise en évidence de la façon la plus heureuse.

En définitive, M. Pomey, en écrivant le présent Ouvrage, a non seulement enrichi notre littérature scientifique française, mais encore rendu un très grand service, à la fois aux théoriciens qui veulent se mettre au courant des applications modernes de l'Électricité, et aux techniciens qui veulent s'initier le plus rapidement et le plus directement possible aux méthodes nouvelles de calcul et acquérir des notions rigoureuses et précises, en même temps que des aperçus philosophiques, sur les phénomènes fondamentaux dont ils ont à faire l'application.

André Blondel.

Digitized by Google

Digitized by Google

AVIS AU LECTEUR.

Un certain nombre de Chapitres du présent Ouvrage ont fait l'objet de leçons professées à l'École professionnelle supérieure des Postes et Télégraphes aux élèves ingénieurs. Ceux-ci sont d'anciens élèves de l'École Polytechnique ou des licenciés, etc. On voit par là le degré d'instruction qui est supposé chez le lecteur. Cependant, les Chapitres sur le calcul vectoriel, sur les imaginaires, etc., ne supposent d'autres connaissances que celles des mathématiques élémentaires, et, d'une façon générale, l'auteur s'est efforcé de développer les calculs, de manière à éviter l'obligation de recourir à d'autres traités.

On trouvera aussi, réunies, la démonstration d'un grand nombre de formules utiles, soit à l'ingénieur mécanicien, soit à l'électrotechnicien. C'est pourquoi une liste détaillée des formules a été annexée à la table des matières.

Le présent Ouvrage n'a pu être mené à bien que grâce à la bienveillance du général Ferrié et aux encouragements rencontrés dans ce foyer intellectuel qu'a été pendant la guerre l'établissement central de la Radiotélégraphie militaire.

M. Auric, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a, il y a longtemps, résolu le problème de la page 242 relatif aux équations différentielles linéaires par des développements en série et sans recourir au calcul symbolique (*Nouvelles Annales de Mathématiques*).

M. Abraham a heureusement redressé des erreurs que j'avais commises dans la théorie du transformateur. Il m'a communiqué d'intéressantes remarques relatives à la génération des oscillations. Je ne saurais trop le remercier.

J'ai utilisé, sans citer les auteurs, beaucoup de résultats importants, notamment la théorie des deux réactions de M. A. Blondel, à

Digitized by Google.

qui sont dues aussi les idées maîtresses sur la résonance primaire et les étincelles musicales.

Calcul vectoriel : M. A. Blondel a indiqué, il y a plus de vingt ans, que, pour avoir les puissances actives et réactives, il suffisait d'avoir soin de décomposer tous les vecteurs suivant deux axes rectangulaires; les puissances actives ne peuvent provenir que des produits des composantes parallèles, les puissances réactives que des produits des composantes perpendiculaires.

Un Index bibliographique indique les principales sources où l'auteur a puisé.

J.-B. Pomey.

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

1° Traités généraux.

1. *La télégraphie sans fil et les ondes électriques*, par J. BOULANGER et G. FERRIÉ (Berger-Levrault et Cie, éditeurs, Paris, 5-7, rue des Beaux-Arts).
2. *Les oscillations électriques*, par TISSOT (Octave Doin et fils, éditeurs, 8, place de l'Odéon, Paris).
3. *Theoretische Telegraphie*, par le Dr F. BREISIG, Professor und Ober-Telegraphen ingenieur im Reichspostamt (Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1910).
4. *Traité d'électricité et de magnétisme*, par VASCHY (Baudry et Cie, éditeurs, 15, rue des Saints-Pères, Paris, 1890).
5. *Kapazitæt und Induktivitæt*, par le Dr Ernst ORLICH, Professor und Mitglied der physikalisch-technischen Reichsanstalt (Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1910).
6. *Les oscillations électromagnétiques et la télégraphie sans fil*, par le Professeur Dr J. ZENNECK, traduit par MM. Blanchin, Guérard, Picot, officiers de marine (Gauthier-Villars, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, quai des Grands-Augustins, 55, Paris).
7. *Electromagnetic Theory*, par Olivier HEAVISIDE (London, *The Electrician* printing and publishing Company, limited, Salisbury Court, Fleet Street E. C.).
8. *The wireless telegraphist's Pocket Book of notæ, formulæ and calculations*, par A. FLEEMING (publié par The Wireless Press, limited, Marconi house, Strand, London, W. C.).
9. *Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*, supplément n° 3; Mémoires de MM. PUPIN et CAMPBELL sur la propagation des courants téléphoniques (A. Dumas, éditeur, 6, rue de la Chaussée-d'Antin).
10. *IIe Congrès international des techniciens des Administrations des télégraphes et des téléphones de l'Europe* (Imprimerie nationale, MDCCCX, travaux de M. Pleijel).

Digitized by Google

2° Étincelles musicales et réglages à la résonance.

11. Pour l'historique :

Électricité : Sur l'origine de la télégraphie sans fil par étincelles musicales. Note de M. A. Blondel (*Comptes rendus*, t. 156, p. 371, séance du 3 février 1913). Extrait d'un pli cacheté n° 6041 déposé par M. A. Blondel, le 16 août 1898, où se trouve décrit, outre la syntonie acoustique, l'emploi des alternateurs à fréquence élevée, pour la production des étincelles musicales, et U. S. Patent, n° 783992 de 1900.

12. Résonance primaire :

Sur la décharge des condensateurs alimentés par des courants alternatifs et sur le réglage des transformateurs à la résonance, par A. Blondel (*Éclairage électrique*, t. III, 1907, p. 217, 253, 325, n°s 20, 21 et 28; *Bulletin de la Société française de Physique*, 1907, p. 233, et *Journal de Physique*, 4e série, t. VI, 1908).

13. *Cours d'électricité théorique*, 1905-1906 (École supérieure des Télégraphes, M. Pomey). Le problème de la ligne télégraphique affectée de pertes équidistantes est traité en employant les propriétés de l'exponentielle (feuilles lithographiées).

14. A. Blondel et C. Le Roy, *Nouvelle méthode de calcul des lignes de transport d'énergie à courants alternatifs avec capacité et perditance réparties* (*La Lumière électrique*, 2e série, t. VIII et IX, 1909, n°s 38, 39, 43, 44, 52). — Un calcul par voie de récurrence conduit directement à des développements qui représentent les fonctions hyperboliques réelles.

Digitized by Google

INTRODUCTION

A LA

THÉORIE DES COURANTS TÉLÉPHONIQUES

ET DE LA

RADIOTÉLÉGRAPHIE

CHAPITRE I.

INTRODUCTION MATHÉMATIQUE.

Dans ce Chapitre, je rappelle très sommairement les principes du calcul vectoriel; parmi les formules indiquées, il y a lieu de remarquer tout particulièrement la règle de calcul

$$[C[AB]] = A(BC) - B(CA),$$

qui est d'un usage extrêmement fréquent, soit que C et A soient des vecteurs, soit que ces lettres représentent l'opérateur ∇ dont les projections sur les axes sont les symboles d'opération $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$.

Après avoir introduit les symboles différentiels, je montre comment Heaviside obtient la formule symbolique qui représente la formule de Taylor.

La fonction $f(x - ht)$ est la représentation d'une onde qui se propage avec la vitesse constante h vers les x positifs, quand le temps t varie. L'équation

$$(A\nabla)F = \frac{dF}{dt}$$

est celle de la propagation d'une onde dans la direction du vecteur $-A$; ces remarques rattachent la formule de Taylor à des notions physiques qui la rendent intuitive.

Digitized by Google

Je consacre la fin du Chapitre à des observations concernant la formule d'Ostrogradski et celle de Stokes et à la formule par laquelle Vaschy a donné la signification mathématique des actions à distance, exprimées soit par la loi de Newton, soit par celle de Laplace. Je m'abstiens cependant d'entrer dans la démonstration. Au contraire, je présente avec quelque détail la démonstration de la formule qui donne la variation du flux d'un vecteur à travers une portion de surface en mouvement, parce que cette formule, tout à fait fondamentale, est moins connue.

La théorie de Hertz pour l'électrodynamique des corps en mouvement n'est autre chose que l'application pure et simple de cette formule. La question de savoir si l'on obtient ainsi les véritables équations du champ électromagnétique est discutée plus loin.

Cette théorie conforme aux principes ordinaires de la Mécanique rationnelle, où le déplacement absolu s'obtient en composant le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif, n'explique pas le phénomène dit *de l'entraînement partiel de l'éther*.

Principes élémentaires de calcul vectoriel.

1. Soient A et B deux vecteurs ayant pour composantes suivant les axes de coordonnées O_x, O_y, O_z qui forment un trièdre trirectangle respectivement $(A_x A_y A_z)$, $(B_x B_y B_z)$. Si l'on a

$$A_x = B_x, \qquad A_y = B_y, \qquad A_z = B_z,$$

nous écrirons simplement

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

2. Si l'on a

$$C_x = A_x + B_x, \qquad C_y = A_y + B_y, \qquad C_z = A_z + B_z,$$

et si nous appelons C le vecteur qui a pour composantes C_x, C_y, C_z, nous écrirons simplement

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

3. J'appellerai $|A|$ la valeur absolue du vecteur A et j'aurai

$$|A|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2.$$

Les cosinus directeurs du vecteur A seront $\frac{A_x}{|A|}$, $\frac{A_y}{|A|}$, $\frac{A_z}{|A|}$.

Digitized by Google

En vertu du théorème des projections, on aura, en projetant le vecteur B sur le vecteur A,

$$|B|\cos\widehat{AB} = B_x\frac{A_x}{|A|} + B_y\frac{A_y}{|A|} + B_z\frac{A_z}{|A|}.$$

Donc l'expression

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z,$$

que je représenterai indifféremment par

$$(AB) \text{ ou par } (BA),$$

représente la quantité non dirigée ou scalaire

$$|A| \times |B| \times \cos\widehat{AB}.$$

D'où cette première définition. Considérons l'expression

$$(AB) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

ou

$$(AB) = |A| \times |B| \times \cos\widehat{AB},$$

(AB) est le produit scalaire de A et de B, c'est une simple quantité algébrique; rien n'empêche, si l'on y trouve avantage, de considérer les composantes $A_xA_yA_z$, $B_xB_yB_z$ comme des quantités imaginaires; cela pourra se produire dans le cas où l'on aurait affaire à des variables, fonctions périodiques du temps.

4. Définissons maintenant le produit vectoriel.

Formons le Tableau des composantes des vecteurs C, A, B :

C.....	C_x	C_y	C_z
A.....	A_x	A_y	A_z
B.....	B_x	B_y	B_z

On dit que C est le produit vectoriel de A par B et l'on désigne par

$$C = [AB]$$

le vecteur dont les composantes sont les mineurs des éléments de la première ligne du Tableau ci-dessus. On aura donc

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y,$$
$$C_y = A_zB_x - A_xB_z,$$
$$C_z = A_xB_y - A_yB_x.$$

Digitized by Google

La valeur absolue de C se déduit de la formule de Lagrange

$$C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2$$

ou

$$C^2 = |A|^2 \times |B|^2 \left(1 - \cos^2 \widehat{AB}\right)$$

ou

$$|C| = |A| \times |B| \times \sin \widehat{AB}.$$

Quant à la direction de C, les deux identités

$$A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z = 0,$$
$$B_x C_x + B_y C_y + B_z C_z = 0$$

montrent que cette direction est perpendiculaire à A et à B.

Reste à déterminer le sens.

Or, si nous considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = |C|^2 > 0,$$

on voit qu'il est essentiellement positif. Mais ce déterminant ne pourrait changer de signe que si l'un des vecteurs A, B ou C passait dans le plan des deux autres.

Si les deux vecteurs A et B ne deviennent pas parallèles, le vecteur C ne deviendra jamais nul et le plan des vecteurs A et B restera toujours bien défini.

Si l'on s'arrange alors à déformer l'angle des vecteurs A et B de manière à amener A et B à avoir leur origine à l'origine des axes de coordonnées, le vecteur A étant placé suivant Oy et le vecteur B suivant Oz, il faudra, pour que le déterminant soit positif, que le vecteur C soit sur Ox. Donc le trièdre ABC sera alors de signe positif, c'est-à-dire orienté comme le trièdre des axes et il en sera de même du trièdre primitif, donc CAB ou ABC ou BAC qui sont trois trièdres de même signe ont la même orientation que le trièdre des axes. Cela détermine sans ambiguïté le sens du vecteur C.

Il est à remarquer que si l'on intervertit A et B, les différences C_x, C_y, C_z changent de signe et l'on a

$$[AB] = -[BA].$$

Digitized by Google

5. Pour ces premiers éléments, je me suis servi des quelques formules simples de géométrie analytique, afin d'abréger l'exposé et d'éviter les abstractions philosophiques. Mais il est à remarquer que, ces préliminaires étant admis, le calcul géométrique peut se poursuivre sans faire appel ni aux théorèmes de la géométrie ordinaire, ni aux formules de la géométrie analytique.

Je rappellerai seulement que si le vecteur |BC| représente en valeur absolue le parallélogramme construit sur les vecteurs B et C, l'expression

$$(A[BC])$$

représentera le produit de ce parallélogramme par la projection du vecteur A sur la normale à ce même parallélogramme. C'est donc le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs A, B et C et la condition pour qu'ils soient coplanaires, c'est

$$(A[BC]) = 0.$$

Il est évident, d'après la signification géométrique, qu'on peut faire une permutation circulaire sans changer ni la valeur absolue, ni le signe. Si, au contraire, on inverse l'ordre de deux vecteurs, on change le signe d'un produit vectoriel et, par suite, le volume change de signe. Quand donc ce volume a-t-il une expression positive? C'est quand on peut déformer le trièdre sans faire passer un vecteur dans le plan des deux autres de manière à placer A sur l'axe des x, B sur l'axe des y et C sur l'axe des z. Comme au cours de la déformation, l'orientation du trièdre n'a pas changé, c'est que son orientation était celle du trièdre des axes.

Si donc A, B, C forment un trièdre positif, et si V est le volume, on aura

$$V = (A[BC]) = (B[CA]) = (C[AB]),$$

et, pour simplifier l'écriture, on pourra même écrire

$$V = (ABC) = -(BAC), \ldots.$$

Cela posé, cherchons comment un vecteur D peut se décomposer suivant trois vecteurs non coplanaires donnés A, B, C; on a évidemment

$$D = A \times x + B \times y + C \times z,$$

x, y, z étant des facteurs scalaires.

Digitized by Google

Projetons sur $|AB|$, on aura zéro pour les projetantes de A et de B et il restera

$$(D|AB|) = z(|AB|C)$$

ou

$$z = \frac{(DAB)}{(ABC)},$$

x et y se détermineraient de même, d'où la formule

$$(ABC)D = (DBC)A + (DCA)B + (DAB)C.$$

C'est une formule fondamentale.

6. Cherchons maintenant la valeur du vecteur

$$|A[AB]|.$$

Il est clair qu'il est perpendiculaire à $[AB]$, donc il est dans le plan de A et de B et l'on pourra le décomposer suivant ces deux vecteurs. On peut donc écrire

$$|A[AB]| = xA + yB,$$

x et y étant des quantités scalaires.

Pour déterminer x et y, je projette successivement sur A et sur B. Évidemment la projection sur A est nulle, puisque le vecteur considéré est perpendiculaire à A; on aura donc

$$x(A^2) + y(BA) = 0,$$
$$x(AB) + y(B^2) = (B|A[AB]|) = -(|AB|^2).$$

D'où, en résolvant :

$$x((A^2)(B^2) - (AB)^2) = (AB)(|AB|^2)$$

ou, d'après la formule de Lagrange,

$$x = (AB)$$

et, par suite,

$$y = -(A^2),$$

d'où

$$|A[AB]| = A(AB) - B(A^2).$$

7. Ce résultat va nous permettre de vérifier la formule très importante ci-après :

$$|C[AB]| = A(BC) - B(CA).$$

Digitized by Google

Il est clair tout d'abord que le vecteur qui figure au premier membre est perpendiculaire au vecteur |AB| et se trouve, par conséquent, dans le plan de A et de B, de sorte que si on le décompose suivant ses trois composantes suivant A, B et C, la composante suivant C disparaît et la formule sera démontrée, si je prouve que les projections des deux membres sur le vecteur A sont égales et qu'il en est de même pour la projection sur le vecteur B; mais la symétrie de la formule, par rapport à B et à A, montre qu'il suffit d'effectuer la première vérification. Or on a, pour projection sur A du vecteur du second membre,

$$(A^2)(BC) - (AB)(CA)$$

ou

$$(C, B(A^2) - A(AB))$$

ou, d'après la formule précédente,

$$-(C, |A[AB]|)$$

ou

$$([AC][AB]) = (A|C[AB]|).$$

Ce qui est la projection sur A du vecteur représenté par le premier membre. La formule est donc démontrée.

Ces calculs sont destinés à montrer l'esprit des opérations du calcul vectoriel; on n'évite pas, dans une certaine mesure, les calculs algébriques; nous avons eu à déterminer les quantités scalaires x, y, z, mais on n'a pas à préciser les axes de coordonnées, et c'est là l'avantage très grand du calcul vectoriel; il ne fait intervenir que les vecteurs qui ont trait directement à la question.

Applications. — Posons

$$A' = [BC], \qquad B' = [CA], \qquad C' = [BC]$$

et, soit D un vecteur quelconque, on aura

1° $$D(ABC) = A(DA') + B(DB') + C(DC');$$

2° $$D(ABC) = A'(DA) + B'(DB) + C'(DC).$$

On vérifie la première formule en projetant, par exemple, sur A', on a

$$(A'D)(ABC) = (AA')(DA') + (BA')(DB') + (CA')(DC');$$

or, on a

$$(ABC) = (AA'), \qquad (BA') = 0, \qquad (CA') = 0,$$

Digitized by Google

et il reste une identité; en projetant sur B′ et C′, on aurait de même des identités, donc les vecteurs représentés par les deux membres, ayant mêmes projections sur trois axes, doivent être équipollents.

3° Je passe à deux applications qui ont un intérêt à la fois en géométrie et dans la théorie des déterminants.

Si dans la formule

$$|A[BC]| = B(AC) - C(AB),$$

nous remplaçons le vecteur A par le vecteur |AC|, nous obtenons, en conservant la notation,

$$[CA] = B', \qquad [BC] = A',$$

l'équation ci-après :

$$[A'B'] = -B(B'C) + C(BB').$$

Mais on a

$$(B'C) = (CAC) = 0, \qquad (BB') = (BCA) = (ABC);$$

d'où

$$[A'B'] = C(ABC)$$

et, si les vecteurs A, B, C sont égaux à l'unité, le premier membre se réduit, en valeur absolue à

$$\sin\widehat{BC}.\sin\widehat{AC}.\sin\widehat{C},$$

$\widehat{C}$ étant l'angle du dièdre C.

4° Si dans la formule

$$D(ABC) = A(DA') + B(DB') + C(DC')$$

on remplace D par |A′B′|, il vient

$$[A'B'](ABC) = C(A'B'C'),$$

car les autres termes disparaissent.

En comparant avec l'expression précédente de |A′B′|, nous obtenons

$$(ABC)^2 = (A'B'C'),$$

c'est-à-dire que le carré d'un déterminant est égal au déterminant formé avec ses mineurs pour éléments.

Digitized by Google

Symboles différentiels.

1. Je pose ∇ comme le symbole d'un vecteur opératoire qui aurait pour composantes $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$.

Ce vecteur opératoire peut être appliqué à une quantité scalaire ou à une quantité vectorielle.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction algébrique de x, y, z, ∇f sera le vecteur de composantes

$$(\nabla f) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

2. Soit de même A un vecteur, fonction de x, y, z: nous avons à définir

$$(\nabla \mathrm{A}) \quad \text{et} \quad [\nabla \mathrm{A}].$$

On aura

$$(\nabla \mathrm{A}) = \frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial z}$$

et l'on écrira

$$(\nabla \mathrm{A}) = \mathrm{div}\,\mathrm{A} \qquad (\text{divergence de A}).$$

On aura semblablement

$$[\nabla \mathrm{A}]_x = \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial z},$$

$$[\nabla \mathrm{A}]_y = \frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial x},$$

$$[\nabla \mathrm{A}]_z = \frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial y};$$

donc si l'on forme le Tableau symbolique

$$[\nabla \mathrm{A}] \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathrm{A}_x, & \mathrm{A}_y, & \mathrm{A}z, \end{cases}$$

le vecteur $[\nabla \mathrm{A}]$ est le vecteur dont les trois composantes sont les mineurs de ce Tableau, on écrira

$$[\nabla \mathrm{A}] = \mathrm{rot}\,\mathrm{A},$$

et l'on dira que $[\nabla \mathrm{A}]$ est le rotationnel de A.

On peut aussi donner un nom au vecteur ∇f; ici les auteurs varient, nous écrirons que ∇f est égal et de signe contraire au vecteur gradient de f, soit

$$\nabla f = -\,\mathrm{grad}.f.$$

Digitized by Google

On considère parfois ∇f comme représentant le gradient lui-même.

3. *Applications.* — Soit ρ le vecteur qui a pour composantes x, y, z; on aura

$$(\nabla\rho) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

ou

$$\operatorname{div}\rho = 3,$$

puis

$$[\nabla\rho] = 0.$$

Soit encore

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{ou} \qquad r = |\rho|,$$

les composantes de ∇r seront

$$(\nabla r) \qquad \frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r};$$

d'où

$$\nabla r = \frac{\rho}{r},$$

r étant le module du vecteur ρ,

$$r = |\rho|.$$

Donc ∇r est le vecteur unité dirigé suivant le vecteur ρ.

On aura, pour le produit scalaire,

$$(\rho\,\nabla r) = x\,\frac{x}{r} + y\,\frac{y}{r} + z\,\frac{z}{r} = r.$$

Donc

$$(\rho\,\nabla r) = r.$$

On aura encore

$$\nabla\,\frac{1}{r^n} = -\,\frac{n}{r^{n+1}}\,\nabla r$$

et, par suite,

$$\nabla\,\frac{1}{r} = -\,\frac{1}{r^3}\,\rho.$$

J'écrirai, d'une façon générale,

$$(\nabla\,\nabla f) = (\nabla^2 f) = \Delta f,$$

et je dirai que Δ est le Laplacien de f.

J'aurai d'ailleurs

$$(\nabla^2 f) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f.$$

Cherchons la valeur de $\Delta\,\frac{1}{r}$.

Digitized by Google

Voici le calcul de $\Delta \frac{1}{r}$ par les procédés du calcul vectoriel, on aura

$$\Delta \frac{1}{r} = \left(\nabla, -\frac{1}{r^3}\rho\right) = \frac{3}{r^4}(\nabla r\,\rho) - \frac{1}{r^3}(\nabla\rho).$$

Or on a, d'après des résultats que nous venons d'obtenir,

$$(\nabla r\,\rho) = r, \qquad (\nabla\rho) = 3;$$

d'où

$$\Delta \frac{1}{r} = 0,$$

et $\frac{1}{r}$ est solution de l'équation de Laplace,

$$\Delta f = 0.$$

4. Soit à l'origine une unité d'électricité, le potentiel en un point P sera

$$\frac{1}{r},$$

r étant la distance OP, et la force électrique, c'est-à-dire l'intensité du champ électrique, sera

$$-\nabla\frac{1}{r}, \quad \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{pour} \quad V = \frac{1}{r}\right).$$

Effectuons cette dérivation; il vient, pour l'intensité E du champ électrique,

$$E = -\left(-\frac{1}{r^2}\nabla r\right) = \frac{1}{r^2}\nabla r.$$

Et l'on vérifie que ∇r est bien le vecteur unité suivant le rayon vecteur OP.

D'une façon générale, si nous avons un potentiel f, l'intensité du champ sera

$$-\nabla f.$$

Projetons cette intensité sur un vecteur A, nous aurons

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}A_x - \frac{\partial f}{\partial y}A_y - \frac{\partial f}{\partial z}A_z}{|A|} = \frac{1}{|A|}(-(A\nabla)f).$$

5. Si le vecteur A se réduit à un vecteur unité ν, on aura, pour la

Digitized by Google

composante E_ν du champ suivant ν,

$$E_\nu = -(\nu\nabla)f.$$

On voit ainsi la signification du symbole $(\nu\nabla)$ appliqué à une fonction scalaire f.

6. Appliquons ce même symbole opératoire à un vecteur B; alors, par définition, A étant une constante vectorielle,

$$(A\nabla)B$$

sera le vecteur dont les composantes sont

$$(A\nabla)B_x, \qquad (A\nabla)B_y, \qquad (A\nabla)B_z,$$

et chacune de ces quantités a un sens connu, d'après ce qui vient d'être dit; par exemple, on a

$$(A\nabla)B_x = A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}.$$

7. L'expression opératoire

$$A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{ou} \qquad (A\nabla)$$

se rattache étroitement à la formule de Taylor.

On a, en effet, d'après le théorème des fonctions de fonctions et des fonctions composées,

$$\frac{d}{dt}F(x + A_x t, y + A_y t, z + A_z t) = \frac{\partial F}{\partial x}A_x + \frac{\partial F}{\partial y}A_y + \frac{\partial F}{\partial z}A_z;$$

d'où l'équation de propagation :

$$(A\nabla)F = \frac{dF}{dt};$$

traitons le symbole $(A\nabla)$ comme une quantité algébrique et nous aurons, en intégrant,

$$F = e^{(A\nabla)t}F_0,$$

F_0 étant ce que devient F pour $t = 0$; d'où

$$(1) \qquad F(x + A_x t, y + A_y t, z + A_z t) = e^{(A\nabla)t}F(x, y, z)$$

Digitized by Google

ou, en faisant $t = 1$, et développant l'exponentielle en série,

$$(2)\qquad F(x + A_x, y + A_y, z + A_z) = F(x, y, z) + (A\nabla)F + \frac{(A\nabla)^2}{1.2}F + \frac{(A\nabla)^3}{1.2.3}F + \ldots,$$

ce qui est la formule de Taylor. La formule (1) est une formule symbolique qui est une identité; la formule (2) est une formule algébrique qui exige l'existence des dérivées et la convergence de la série. Remplaçons $F(x, y, z)$ par $G(x, y, z)$, puis par $H(x, y, z)$ et soit B le vecteur qui a pour trois composantes F, G, H; nous aurons, par application de la formule (1),

$$B(x + A_x t, y + A_y t, z + A_z t) = e^{(A\nabla)t} B(x, y, z)$$

et, en supposant t infiniment petit, si nous appelons P le point (xyz) et P′ le point infiniment voisin $(x + A_x t,\ y + A_y t,\ z + A_z t)$, il viendra

$$B_{P'} - B_P = (A t \nabla) B.$$

B peut être considéré comme un vecteur attaché à une molécule qui passe dans le temps t infiniment petit du point P, au point P′ infiniment voisin; sa variation est alors donnée par la formule précédente.

8. *Formule d'Ostrogradski.* — On considère un volume U enveloppé par une surface S et faisant partie du champ d'un vecteur A. Soit ν le vecteur unité normal à la surface S en un point quelconque et dirigé vers l'extérieur du volume U; on peut transformer une intégrale de surface en intégrale de volume par la formule ci-après, dite *formule d'Ostrogradski :*

$$\int_S (A_\nu)\, dS = \int_U \operatorname{div} A\, d\varpi.$$

La notation vectorielle « div » rappelle que ν doit être dirigé vers l'extérieur.

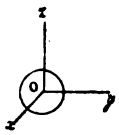
9. *Formule de Stokes.* — On considère dans le plan des xy un petit contour entourant l'origine et l'on appelle « sens direct de description » le sens qui amène Ox sur Oy par une rotation de 90° autour de Oz.

Digitized by Google

Si l'on a sur une surface S un contour infiniment petit, on peut choisir pour côté positif de la surface l'une des deux faces. Une fois ce choix fixé, le sens positif de parcours du petit contour est déterminé.

Si une surface bordée par un contour fini (C) est une surface ayant

Fig. 1.



deux faces distinctes, on peut au moyen des conventions ci-dessus définir le sens de description positif du contour (C), ce sera le sens de description d'un petit contour décrit dans le sens positif qu'on ferait glisser sur la surface de manière à l'amener à être tangent au bord de cette surface; au point de contact, le sens positif de (C) est celui du petit contour.

Cela posé, soit ν le vecteur unité normal à la surface du côté de la face positive. On a alors la formule

$$\int_{(C)} (A\, ds) = \int_{(S)} (\nu \operatorname{rot} A)\, dS.$$

La première intégrale est prise le long du contour (C) qui borde (S) dans le sens positif, et ds est un vecteur représentant un élément positif de contour; dS est l'élément de surface, c'est une quantité absolue.

Si l'on change le côté positif de la surface pour le côté négatif en étendant l'intégration à la face opposée, on change le signe de ν, mais en même temps le sens positif de description de (C) est changé et l'intégrale du premier membre change aussi de signe avec ds. Donc la formule subsiste, quel que soit le côté de la surface que l'on considère comme le côté positif.

Supposons qu'on admette comme sens positif de rotation celui qui amène Oy sur Ox en tournant autour de Oz, alors il faudra changer le sens du premier membre en conservant le second.

Si l'on prend, par exemple, une système d'axes

$$(O, x, y, z),$$

Digitized by Google

orienté comme le trièdre

(Est-Nord-Zénith),

le sens positif de rotation est tel que l'observateur qui tourne le long d'un petit contour circulaire, en se tenant debout sur la face positive, laisse à sa gauche l'aire enveloppée.

Si un courant tourne dans ce même sens, le flux magnétique qui est dû à ce courant et qui est embrassé par lui est dirigé de façon à entrer par la face négative et à sortir par la face positive.

10. ***Loi de Newton.*** — Soient m, m', ... des masses électriques agissant sur une unité d'électricité placée au point $P(\alpha\beta\gamma)$, soient r, r', ... leurs distances au point P, on aura pour le potentiel V

$$V = \sum \frac{m}{r}$$

et, pour l'intensité E du champ électrique, on aura

$$E_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}, \qquad E_\beta = -\frac{\partial V}{\partial \beta}, \qquad E_\gamma = -\frac{\partial V}{\partial \gamma}$$

ou

$$E = -\nabla_P V$$

ou

$$E = -\nabla_P \sum \frac{m}{r} = -\sum m \nabla_P \frac{1}{r},$$

l'indice P rappelant que la dérivation se fait suivant les coordonnées du point P.

Si j'appelle M, M', ... les points où se trouvent situées les masses m, m', ..., et si je remarque qu'on a

$$\nabla_P \frac{1}{r} = -\nabla_M \frac{1}{r},$$

parce que r est une fonction des différences des coordonnées (x, y, z) du point M et (α, β, γ) du point P, j'aurai aussi

$$E = \Sigma m \nabla_M \frac{1}{r}.$$

Cette formule est équivalente à

$$E = \text{grad. } V,$$

le gradient étant pris en P.

Digitized by Google

11. ***Loi de Laplace.*** — Soit $i\,d\varpi$ un vecteur, dans l'expression duquel $d\varpi$ représente un élément de volume et i le vecteur densité d'intensité de courant.

Supposons cet élément dans le champ magnétique d'intensité H.

L'expérience indique que cet élément subit une action représentée par

$$F = [iH]\,d\varpi,$$

en supposant que les axes (O, x, y, z) forment un trièdre droit, tel que le trièdre (Est-Nord-Zénith).

Inversement, supposons que le champ H soit dû à un pôle (+1) magnétique placé en P, tandis que l'élément de courant est placé au point M, le champ magnétique H dû au pôle (+1) placé en P sera en M égal à

$$H = -\nabla_M \frac{1}{r};$$

d'où

$$F_M = -\left[i\,\nabla_M \frac{1}{r}\right] d\varpi.$$

La loi de Laplace suppose que l'action exercée inversement sur le pôle P par l'élément de courant $i\,d\varpi$, si tant est que l'on puisse individualiser cette action, est égale et de signe contraire à la première et appliquée au pôle P. En réalité, d'après le principe de l'action et de la réaction, cette action est appliquée à l'élément, et l'on ne peut la supposer appliquée au pôle P qu'à la condition d'y adjoindre un couple, mais on démontre que pour un circuit fermé le couple résultant est nul. Ne nous occupons donc que de la force résultante F_P au point P, on aura

$$F_P = \left[i\,\nabla_M \frac{1}{r}\right] d\varpi.$$

On peut, évidemment, transformer cette expression en remarquant que r est une fonction des différences des coordonnées des points M et P et l'on aura

$$F_P = -\left[i\,\nabla_P \frac{1}{r}\right] d\varpi.$$

Imaginons que nous ayons divers éléments de courant. Les valeurs i, i', i'', ... à considérer dépendent des coordonnées x, y, z de l'élément $d\varpi$ correspondant, mais non des coordonnées α, β, γ du point P,

Digitized by Google

et l'on aura pour la force résultante sur le pôle $+1$ en P

$$\mathbf{F}_P = + \left[\nabla_P \sum \frac{i\, d\varpi}{r} \right],$$

le changement de signe provenant de ce que j'inverse l'ordre des deux vecteurs ∇_P et i.

Je pose

$$\mathbf{A} = \sum \frac{i\, d\varpi}{r}.$$

Ce vecteur A sera le potentiel vecteur des vecteurs $i\, d\varpi$, et l'on aura

$$\mathbf{F}_P = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

le rotationnel étant pris en P.

12. *Théorème de Vaschy.* — Soit H le champ d'un vecteur, dans un volume U limité par une surface S. Supposons ce vecteur H continu à l'intérieur du volume et y possédant des dérivées partielles déterminées.

Je pose ν égal au vecteur unité dirigé vers l'intérieur du volume U normalement à la surface S et j'adopte les notations ci-après :

$$4\pi\sigma = (\nu \mathrm{H}), \qquad 4\pi\rho = (\nabla \mathrm{H}),$$
$$4\pi\tau = [\nu \mathrm{H}], \qquad 4\pi\mu = [\nabla \mathrm{H}].$$

Les quantités $\sigma\, dS$ et $\rho\, d\varpi$ sont des quantités scalaires, dont j'appelle V le potentiel newtonien.

Les quantités $\tau\, dS$ et $\mu\, d\varpi$ sont des quantités vectorielles, dont j'appelle A le potentiel vecteur.

Le théorème de Vaschy apprend qu'on a

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad}. \mathrm{V} + \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Si le vecteur H devenait discontinu sur une surface Σ, on considérerait cette surface comme un feuillet, dont le volume intérieur infiniment petit serait à exclure du volume U, tandis que les deux faces du feuillet seraient à ajouter à la surface S.

13. *Variation d'un flux.* — 1° Considérons une surface, donnée sous la forme paramétrique, chaque point étant rapporté aux deux variables u et v. Quand v varie seul, on a une courbe (v) tracée sur

Digitized by Google

la surface; j'appelle ds_v le vecteur élémentaire d'une courbe de ce genre. Quand u varie seul, on a une autre courbe (u) tracée également sur la surface; j'appelle ds_u le vecteur élémentaire d'une courbe de ce genre. On peut diviser la surface (S) supposée limitée à un contour (C) par un réseau de courbes (u) et (v), y délimitant une infinité de parallélogrammes élémentaires. Nous supposerons, en effet, que les courbes (u) et (v) conservent toujours l'une par rapport à l'autre la même orientation, c'est-à-dire que deux courbes (u) ne se coupent pas sur la portion (S) de surface considérée, non plus que deux courbes (v). Alors l'élément de surface, c'est-à-dire la surface d'un parallélogramme élémentaire, a pour valeur absolue celle du produit

$$[ds_u\, ds_v].$$

et ce vecteur est dirigé par rapport à ds_u et ds_v comme l'axe des z par rapport aux axes des x et des y.

2° Si donc, au lieu de considérer une surface, nous considérons maintenant un volume dont chaque point est rapporté à des coordonnées rectilignes u, v et t, nous obtiendrons en ne faisant varier que t une série de courbes (t), dont j'appellerai ds_t le vecteur élémentaire. Si dans tout le volume considéré (u), (v), (t) restent orientés comme le trièdre des axes, ce que nous supposerons, alors le vecteur

$$[ds_u\, ds_v]$$

est dirigé du côté du vecteur ds_t correspondant, et l'élément de volume $d\varpi$ sera donné par

$$d\varpi = (ds_u\, ds_v\, ds_t).$$

3° Considérons à une certaine époque t une courbe (C) délimitant une surface (S). Soit dS un élément superficiel en un point P(u, v, t) donné par les valeurs u, v particulières des courbes (u) et (v) qui s'y croisent à l'époque t. Imaginons qu'un vecteur A soit fonction de la position du point P. Soit ν la normale à l'élément dS dirigé du côté des t croissants. Le flux du vecteur A à travers l'élément dS sera

$$(\nu \mathrm{A})\, d\mathrm{S}$$

et le flux total embrassé par (C) à travers la surface S sera

$$\int (\mathrm{A}_\nu)\, d\mathrm{S}.$$

Digitized by Google

Mais on a

$$\nu\, dS = [ds_u\, ds_v].$$

De sorte que le flux considéré pourra s'écrire

$$\int (A\, ds_u\, ds_v).$$

Au bout du temps dt, la courbe (C) prend une nouvelle position (C') et la surface (S) est devenue (S'). Le vecteur A est devenu A' et A' diffère de A pour deux raisons : la première, c'est qu'au lieu d'être pris sur la surface (S), il est pris sur la surface (S'), et la seconde c'est qu'au lieu d'être pris sur la surface (S') considérée à l'époque t il est pris sur cette surface à l'époque $t+dt$. On demande d'évaluer la variation éprouvée dans ces conditions par le flux

$$\int A_\nu\, dS,$$

A_ν étant la projection de A sur la normale ν à la face positive de dS.

On aura évidemment

$$\delta \int A_\nu\, dS = \int \frac{\partial A_\nu}{\partial t}\, dt\, dS + \int_{S'} A_{\nu'}\, dS' - \int_S A_\nu\, dS.$$

La première intégrale représente la variation exclusivement due au temps; la seconde intégrale est le flux à travers la surface S' du vecteur A en un point de cette surface, d'après la valeur que ce vecteur y a à l'époque t; la troisième intégrale est la valeur actuelle du flux.

Pendant le temps dt la courbe (C) passe de sa position primitive (C) à sa position finale (C'), d'ailleurs infiniment voisine, en décrivant une surface latérale (Σ) qui est comme la tranche du feuillet (S')(S).

L'ensemble des surfaces (S), (S') et (Σ) constitue une surface fermée et enveloppe un volume U. On peut appliquer le théorème d'Ostrogradski, en écrivant

$$\int_{S'} A_{\nu'}\, dS' - \int_S A_\nu\, dS + \int_\Sigma A_{\nu'}\, d\Sigma = \int_U \operatorname{div} A\, d\varpi.$$

Dans cette formule, la troisième intégrale représente le flux sortant

Digitized by Google

par la tranche et ν'' est le vecteur unité dirigé vers l'extérieur du volume U et normal à la surface latérale Σ.

Nous avons déjà

$$\int \operatorname{div} \mathrm{A}\, d\varpi = \int \operatorname{div} \mathrm{A}(ds_u\, ds_v\, ds_t).$$

Posons $ds_t = \omega\, dt$, alors ω représentera la vitesse du point P, puisque t représente le temps, lorsque le point P se déplace en suivant une ligne définie par deux valeurs déterminées respectivement des paramètres u et v, et dont les divers points s'obtiennent en ne faisant varier que le paramètre t.

On a donc

$$\int \operatorname{div} \mathrm{A}\, d\varpi = \int \operatorname{div} \mathrm{A}(ds_u\, ds_v\, \omega\, dt) = \int \operatorname{div} \mathrm{A}(\omega[ds_u\, ds_v])\, dt$$

ou

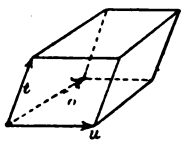
$$\int \operatorname{div} \mathrm{A}\, d\varpi = \int (\omega \operatorname{div} \mathrm{A}.\nu\, d\mathrm{S})\, dt = dt \int (\omega \operatorname{div} \mathrm{A}.\nu)\, d\mathrm{S}.$$

Considérons maintenant la surface latérale, on a

$$\int_\Sigma \mathrm{A}\nu''\, d\Sigma = \int_\Sigma (\mathrm{A}\nu'')\, d\Sigma = \int_\Sigma (\mathrm{A}\nu''\, d\Sigma).$$

Nous pouvons, pour simplifier, supposer que la courbe (C) est obtenue en laissant le paramètre v constant et faisant varier seul le

Fig. 2.



paramètre u. Il suffirait, par exemple, de considérer un point Q à l'intérieur de la surface S et d'imaginer que le premier réseau de courbes, obtenu en donnant successivement à v diverses valeurs, correspond aux diverses positions successives d'une courbe (C) variable qui se rétrécirait progressivement de tous côtés en restant sur la surface et en entourant le point Q. On pourrait imaginer de même que les diverses courbes obtenues en joignant le point Q par un rayon curviligne à un mobile décrivant le contour (C) forment le second réseau. Et enfin on peut imaginer que v croisse du contour

Digitized by Google

vers le point Q et que le sens de mouvement du mobile sur C, quand u croît, soit tel que (u), (v), (t) forment un trièdre ayant pour orientation celle du trièdre des axes, c'est-à-dire un trièdre positif.

Alors le parallélogramme élémentaire construit sur ds_t et ds_u est un élément $d\Sigma$ de la surface latérale; mais comme v croît vers l'intérieur du volume U, la normale extérieure ν'' est dirigée en sens contraire et l'on a

$$\nu'' \, d\Sigma = - [ds_t \, ds_u].$$

On aura donc

$$\int_\Sigma (\mathrm{A}\nu'' \, d\Sigma) = -\int (\mathrm{A} \, ds_t \, ds_u) = -\int (\mathrm{A}\omega \, ds_u) \, dt = -dt \int ([\mathrm{A}\omega] \, ds_u).$$

Cette dernière intégrale représente le travail du vecteur $[\mathrm{A}\omega]$ le long de la courbe (u) qui borde la surface (S).

On peut donc appliquer la formule de Stokes et l'on a

$$\int ([\mathrm{A}\omega] \, ds_u) = \int (\mathrm{rot}[\mathrm{A}\omega].\nu \, d\mathrm{S}).$$

Réunissant ces résultats, nous obtenons

$$\delta \int (\mathrm{A}.\nu \, d\mathrm{S}) = dt \int \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} . \nu \, d\mathrm{S} \right) + \int_\mathrm{U} \mathrm{div}\,\mathrm{A} \, d\varpi - \int_\Sigma \mathrm{A}_{\nu''} \, d\Sigma$$

ou

$$\delta \int (\mathrm{A}.\nu \, d\mathrm{S}) = dt \int \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} . \nu \, d\mathrm{S} \right) + dt . \int (\omega \, \mathrm{div}\,\mathrm{A}.\nu \, d\mathrm{S}) + dt \int (\mathrm{rot}[\mathrm{A}\omega].\nu \, d\mathrm{S}).$$

De sorte qu'on peut écrire, d'une façon abrégée,

$$\delta \mathrm{A} = dt \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} + \omega \, \mathrm{div}\,\mathrm{A} + \mathrm{rot}[\mathrm{A}\omega] \right).$$

C'est une formule fondamentale dans la théorie de Hertz relative à l'électrodynamique des milieux en mouvement.

Nous avons donné la démonstration de cette formule, parce que cette formule est moins connue que celles d'Ostrogradski et de Stokes, dont la démonstration se trouve dans Maxwell.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

TRADUCTION MATHÉMATIQUE DES FAITS FONDAMENTAUX DU MAGNÉTISME ET DE L'ÉLECTRICITÉ.

Ce Chapitre est consacré aux phénomènes fondamentaux du magnétisme et de l'électricité.

Ayant d'abord suivi pas à pas les théories et méthodes de Vaschy, j'ai pu me rendre compte, mieux que nul autre, des points sur lesquels Vaschy lui-même semblait s'être écarté de sa propre voie.

La théorie du magnétisme de Sir William Thomson ne le satisfaisait pas du tout. Je montre qu'il suffit de la parcourir en sens inverse pour lui donner une signification tout à fait conforme aux idées de Vaschy, puisqu'on part de la notion de champ, considérée comme la notion expérimentale fondamentale, pour arriver à la conception du moment magnétique de l'élément de volume.

De même, Vaschy a quelque difficulté à montrer que le moment magnétique de l'aiguille d'épreuve, qui caractérise l'action directrice qui s'exerce sur elle, est aussi le moment magnétique qu'il convient de lui attribuer, quand on la considère à son tour comme engendrant un champ magnétique.

Après la théorie de Sir William Thomson, interprétée dans le langage de Vaschy, cette démonstration, fondée sur le principe de l'égalité de l'action et de la réaction ne souffre plus aucune difficulté.

J'ajoute quelques mots sur le magnétisme permanent, sur le magnétisme induit et sur l'hystérésis.

Je rappelle ensuite très sommairement quelle est la traduction analytique des faits ou phénomènes principaux de l'électricité statique. Il s'agit de donner l'interprétation du principe de la conservation de l'électricité dans le langage mathématique et la définition du pouvoir inducteur électrique.

Digitized by Google

MAGNÉTISME. RAPPEL DES FAITS EXPÉRIMENTAUX FONDAMENTAUX.

1. Tout d'abord, dans les divers laboratoires des observatoires météorologiques, on mesure constamment l'intensité du champ magnétique terrestre et l'on applique couramment les méthodes de retournement.

Celles-ci indiquent qu'un même aimant permanent est susceptible de prendre une infinité de positions d'équilibre dans un même champ magnétique quand il est suspendu par une suspension à la cardan, mais qu'il y a dans l'aimant une file de molécules de direction bien déterminée par rapport au corps de l'aimant qui tend à se placer dans une direction de l'espace bien déterminée par rapport à la Terre. La direction de l'espace reste invariable, en un lieu donné, quel que soit l'aimant d'épreuve employé. Et quand on opère dans des lieux de la Terre différents ou dans le même lieu à des époques différentes, la file de molécules en question conserve son orientation par rapport à l'aimant auquel elle appartient.

La direction de cette file de molécules est l'axe magnétique de l'aimant; la direction suivant laquelle en chaque lieu elle tend à se diriger est la direction du champ magnétique en ce lieu.

Le moment de l'action exercée sur l'aimant est de la forme $C \sin\theta$, θ étant l'angle formé par la direction du champ avec l'axe magnétique de l'aimant.

En un même point, les valeurs de C sont caractéristiques des divers aimants d'épreuve employés, car ces valeurs restent entre elles dans le même rapport, quand on porte les aimants d'épreuve dans un autre champ magnétique uniforme.

En des lieux différents, les valeurs de C sont caractéristiques des divers champs magnétiques observés, car ces valeurs restent entre elles dans le même rapport, quel que soit l'aimant d'épreuve utilisé.

On peut donc mettre C sous la forme

$$C = MH,$$

le facteur M étant caractéristique de l'aimant, le facteur H étant caractéristique du champ. Le facteur M prendra le nom de *moment magnétique de l'aimant*, en tant que cet aimant est exposé à l'action d'un champ. C'est son coefficient d'influence en tant qu'aimant d'épreuve, indépendamment de toute question relative au champ

Digitized by Google

magnétique qui pourrait être dû à la présence de l'aimant lui-même.

2. En second lieu, les expériences de Coulomb apprennent que l'intensité du champ magnétique produit par une aiguille ou un barreau aimanté dérive d'un potentiel. Si l'on admet que cette propriété soit générale, on en conclura que, dans l'air, pour un chemin fermé quelconque, on a, en appelant ds le vecteur élémentaire selon le chemin,

$$\int (\mathrm{H}\, ds) = 0 \tag{1}$$

ou

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{H} = 0. \tag{2}$$

Il pourrait se faire que cette propriété ne fût pas vérifiée; on reconnaîtra alors que cet écart est dû à la présence de courants. C'est un cas que nous écartons.

3. En troisième lieu, l'expérience de l'aimant brisé nous apprend qu'il est impossible de tracer dans l'air une surface fermée qui permette d'isoler à son intérieur un pôle magnétique.

Si j'appelle $d\mathrm{S}$ l'élément d'une surface fermée (S) et ν le vecteur unité normal à $d\mathrm{S}$ et dirigé vers l'extérieur de (S), j'aurai

$$\int (\mathrm{H}_\nu)\, d\mathrm{S} = 0 \tag{3}$$

ou

$$\mathrm{div}\,\mathrm{H} = 0. \tag{4}$$

Telles sont les propriétés du champ magnétique dans l'air.

4. Comment définir le champ à l'intérieur de l'aimant lui-même?

Le fait caractéristique c'est que le champ observé dépend de la forme de la cavité pratiquée dans le corps de l'aimant.

Il y a deux formes de cavités particulièrement intéressantes. On a la première dans le cas où la cavité se réduit à un canal de section infiniment étroite. Ce canal peut être dirigé en particulier suivant l'axe Ox, soit alors H_x la composante suivant l'axe du canal du champ qu'on y observe. Si le canal était dirigé suivant Oy ou Oz, on aurait de même les composantes H_y et H_z dans les directions de Oy et de Oz. Cela fait trois expériences distinctes. Elles suffisent, en vertu de l'équation (1), comme on le verrait aisément, pour qu'on

Digitized by Google

en déduise que la composante suivant un vecteur ν à l'intérieur d'un canal infiniment délié ayant ν pour axe sera égale à

$$\nu_x H_x + \nu_y H_y + \nu_z H_z.$$

Ainsi il y a un vecteur H, à savoir le vecteur construit sur H_x, H_y et H_z comme composantes qui est tel que

$$(H\nu)$$

est la composante tangentielle dans un canal infiniment délié dirigé dans la direction du vecteur unité ν.

Ce vecteur H est appelé l'*intensité du champ magnétique.*

Une autre forme de cavité qui offre de l'intérêt, c'est celle d'un disque plat. Ce disque serait creusé dans la substance de l'aimant, vidé de matière et rempli d'air. En particulier, ce disque infiniment mince peut être normal soit à l'axe des x, soit à l'axe des y, soit à l'axe des z. Ce sont trois expériences différentes. J'appelle B_x, B_y, B_z les composantes du champ normales au disque dans chacun de ces trois cas. Cela suffit pour qu'on sache quelle est la composante normale dans une cavité en forme de disque qui serait normale au vecteur unité ν. D'après l'équation (2), on démontre que cette composante normale a pour valeur

$$(B\nu),$$

B étant le vecteur résultant des trois vecteurs B_x, B_y, B_z.

Ce vecteur B s'appelle l'*induction magnétique.*

5. Dans l'air, on a, naturellement,

$$B = H.$$

A l'intérieur d'un aimant, $B - H$ n'est pas nul. Donc l'état de magnétisme en un point de l'aimant pourra être caractérisé par la valeur d'un vecteur I, tel qu'on ait

$$I = \frac{B - H}{4\pi}.$$

Ce vecteur I est nul dans l'air, mais non dans l'aimant.

6. Remarquons maintenant que l'équation (1) apprend, comme un raisonnement simple le montrerait, que le vecteur H a, à la surface de l'aimant, une composante tangentielle continue et que l'équa-

Digitized by Google

tion (3) apprend de même que le vecteur B a, à la surface de l'aimant, une composante normale continue.

7. Appliquons au vecteur H le théorème de Vaschy.

Ce théorème reste applicable au cas où le vecteur H éprouverait une discontinuité sur une surface (S) limitée par une courbe (C). Il suffirait de dédoubler la surface (S), en formant de sa face positive et de sa face négative les deux faces d'un feuillet infiniment mince et de supprimer du volume considéré le volume intérieur du feuillet, tandis que l'on considérerait les deux faces comme faisant partie de la surface extérieure qui délimite le volume d'intégration.

Un terme tel que (νH) serait alors remplacé par

$$(\nu_1 H_1 + \nu_2 H_2),$$

ν_1 étant la normale à l'une des faces du feuillet, ν_2 la normale à l'autre face; ν_1 et ν_2 sont deux vecteurs unités de même direction mais de sens opposé, de sorte que la somme considérée se réduit à

$$(\nu_1 (H_1 - H_2)).$$

Cela posé, la surface qui limite l'aimant est une surface de discontinuité pour le vecteur H. J'admettrai que ν désigne la normale à la surface de l'aimant dirigé vers l'intérieur de l'aimant.

L'autre surface qui limite le champ est censée reculée à l'infini et à l'infini le champ est supposé nul. Les intégrales de surface relatives à la surface rejetée à l'infini disparaissent donc.

Il ne s'agit plus de calculer les valeurs de

$$4\pi\sigma = (\nu H), \qquad 4\pi\rho = \operatorname{div} H,$$
$$4\pi\tau = [\nu H], \qquad 4\pi\mu = \operatorname{rot} H.$$

Le vecteur H dérivant d'un potentiel, on a

$$\operatorname{rot} H = 0.$$

La composante de H tangentielle à la surface de l'aimant étant continue, on a

$$[\nu H] = 0.$$

Puis on a

$$\operatorname{div} H = \operatorname{div} B - 4\pi \operatorname{div} I.$$

Or on a

$$\operatorname{div} B = 0,$$

Digitized by Google

d'où

$$\operatorname{div} H = -4\pi \operatorname{div} I$$

ou

$$\rho = -\operatorname{div} I.$$

On a aussi

$$4\pi\sigma = (\nu H),$$

c'est-à-dire à la surface de l'aimant

$$4\pi\sigma = (\nu, H_1 - H_2),$$

H_1 étant la valeur de H à l'intérieur de l'aimant, H_2 sa valeur dans l'air; mais on a, en appelant B_1 la valeur de B dans l'aimant, B_2 sa valeur dans l'air :

$$H_1 - H_2 = B_1 - B_2 - 4\pi I,$$

puisque I dans l'air est nul; mais on a

$$(\nu, B_1 - B_2) = 0,$$

parce que la composante normale de B est continue; il reste donc

$$4\pi\sigma = (\nu, H_1 - H_2) = (\nu, -4\pi I)$$

ou

$$\sigma = -(\nu I),$$

et par suite H dérive du potentiel

$$V = \int -\frac{(\nu I)\, dS}{r} - \int \frac{\operatorname{div} I}{r}\, d\varpi.$$

Appliquons la formule d'Ostrogradski, il vient

$$V = \int (I\nabla)\frac{1}{r}\, d\varpi.$$

Ce qui indique que le potentiel peut être considéré comme dû à des masses fictives, réparties comme suit.

8. Soient $+m$ et $-m$, deux masses égales et de signes contraires situées en deux points infiniment voisins l'un de l'autre P' et P et agissant suivant la loi de Newton; le potentiel dû à la masse $-m$ située en P' sera en un point du champ situé à la distance r de P égal à

$$-\frac{m}{r}$$

Digitized by Google

et le potentiel dû à la masse $+m$ située en P′ sera, au même point,

$$+\frac{m}{r}+m\,dx\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+m\,dy\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+m\,dz\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z},$$

PP′ ayant pour composantes dx, dy, dz, de sorte que le potentiel, dû à l'ensemble des masses $-m$ en P et $+m$ en P′ sera, si j'appelle l le vecteur PP′,

$$(ml\nabla)\frac{1}{r}.$$

Posons

$$ml = \mathrm{I}\,d\varpi$$

ou

$$\mathrm{I} = \frac{ml}{d\varpi},$$

et appelons ml le moment magnétique de l'élément de volume $d\varpi$, en tant que ce volume $d\varpi$ contribue au champ magnétique observé, et la formule qui donne V nous montre que le potentiel dont dérive H peut être considéré comme dû à une infinité de petits moments magnétiques $\mathrm{I}\,d\varpi$.

9. Ainsi donc l'expérience nous a appris à attribuer à un aimant un moment magnétique M en tant que cet aimant subit l'action d'un champ magnétique.

Et nous arrivons ici à définir comme moment magnétique d'une particule une quantité ml qui fait intervenir un fluide fictif dont la masse serait m et qui agirait suivant la loi de Newton.

Pour qu'il n'y ait point d'incompatibilité, il faut que le moment magnétique ml et le moment magnétique M de la même particule soient dans un rapport invariable, ne dépendant que du choix des unités, autrement il faudrait ne pas appeler du même nom deux grandeurs physiques en réalité distinctes.

Pour montrer cette proportionnalité, il nous suffira de faire appel au principe de l'action et de la réaction.

Soient deux aimants AB et A′B′, infiniment petits; plaçons-les de façon que AB et A′B′ soient perpendiculaires à la ligne AA′ et perpendiculaires entre eux. Alors l'action exercée par AB en A′ est $\frac{ml}{r^3}$, et l'action exercée par A′B′ en A est $\frac{m'l'}{r^3}$.

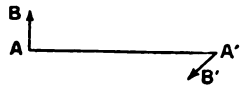
Digitized by Google

L'axe du moment qui agit sur A'B' est dirigé suivant AA' et égal à

$$M' \frac{ml}{r^3},$$

M' étant le moment de l'aimant d'épreuve A'B'.

Fig. 3.



De même, l'axe du moment qui agit sur AB est dirigé suivant A'A et égal à

$$M \frac{m'l'}{r^3},$$

M étant le moment de AB, considéré comme aimant d'épreuve.

On a donc, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction,

$$\frac{M}{ml} = \frac{M'}{m'l'}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

10. *Aimants permanents.* — Les aimants permanents sont caractérisés par le vecteur I en chaque point. On dit que ces aimants sont permanents parce que ce vecteur I demeure invariable quand on change d'époque et de lieu, qu'on porte l'aimant considéré dans des champs magnétiques quelconques ou qu'on le soustraie à toute action magnétique extérieure.

11. *Aimantation induite.* — Supposons, au contraire, que l'aimantation disparaisse quand on transporte la substance hors du champ. Nous pouvons imaginer, par exemple, que l'aimant auquel nos calculs s'appliquaient était constitué par un aimant permanent en acier et par une armature en fer doux. Dans les diverses positions de l'armature, le vecteur I reste invariable dans le volume de l'acier, mais il varie dans le volume du fer doux. On peut alors considérer le vecteur I à l'intérieur du morceau de fer doux comme dû à l'existence du vecteur H résultant des actions combinées des masses fictives de l'aimant et de l'armature. Si le champ magnétique est faible,

Digitized by Google

on aura une approximation suffisante en écrivant

$$I = \varkappa H$$

et x sera une constante, la susceptibilité magnétique. On aura alors

$$B = (1 + 4\pi\varkappa)H$$

et la quantité

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa$$

sera appelée la *perméabilité magnétique*.

Si le corps polarisable par influence était cristallin, la quantité μ ne serait plus une constante scalaire, mais une fonction vectorielle linéaire φ, et l'on aurait

$$B = \varphi H.$$

Si le champ H n'était pas très faible, on écrirait encore

$$B = \mu H.$$

Mais la perméabilité magnétique μ serait une fonction de H.

12. *Hystérésis.* — L'expérience montre que dans le fer μ n'est pas une fonction bien définie de H. L'état du fer est défini en un point non par un vecteur, mais par deux qui sont B et H. Donc, tout d'abord, μ est une fonction de B et de H.

Mais de plus, si l'on fait varier H, on a

$$dB = \mu_1 dH \quad \text{si} \quad dH > 0,$$
$$dB = \mu_2 dH \quad \text{si} \quad dH < 0$$

avec

$$\mu_1 > \mu_2.$$

De plus, μ_1 et μ_2 dépendent de la température.

Enfin, fait fondamental, si l'on fait osciller H lentement entre deux valeurs H_1 et H_2, le point figuratif (B, H) finit par décrire un circuit fermé invariable, qu'on appelle la *boucle d'hystérésis* et qui ne dépend plus que de H_1 et H_2.

Si l'on fait parcourir le cycle plus de 25 ou 50 fois par seconde, il semble que le cycle se déforme très légèrement.

Il faut d'ailleurs avoir eu soin au préalable d'empêcher les courants de Foucault en opérant sur du fer divisé.

13. Application. — *Aimant toroïdal.* — Considérons dans cet

Digitized by Google

aimant un petit tore élémentaire ayant même axe de révolution, et supposons qu'il forme un canal où l'intensité de champ soit H. Le travail de H le long de ce canal de rayon r sera nul; or il est égal à $2\pi r\mathrm{H}$, donc H est nul. On a donc

$$\mathrm{H} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = 4\pi \mathrm{I}_0,$$

I_0 étant l'intensité d'aimantation permanente.

Électro-aimant toroïdal. — Supposons le noyau de fer entouré par un courant d'intensité C formant n spires. Alors, d'après la théorie de l'électromagnétisme, le travail de H le long du canal de rayon r, au lieu d'être nul, sera égal à $4\pi n\mathrm{C}$, d'où

$$2\pi |\mathrm{H}| r = 4\pi n \mathrm{C}$$

ou

$$|\mathrm{H}| = \frac{2n\mathrm{C}}{r}.$$

L'intensité d'aimantation induite sera $\varkappa \mathrm{H}$.

Et s'il y a, en même temps, une aimantation résiduelle I_0, on aura pour intensité totale d'aimantation

$$\mathrm{I}_0 + \varkappa \mathrm{H}.$$

ÉLECTROSTATIQUE.

Les faits expérimentaux sont les suivants :

1° Distinction des corps conducteurs et des corps isolants;

2° Distinction de deux espèces d'électrification;

3° Lois de Coulomb entre de petites sphères électrisées.

L'étude des lois de Coulomb revient à celle des forces subies dans des champs différents par de petits corps d'épreuve électrisés. En portant une même petite sphère d'épreuve dans divers champs, on définit la direction et l'intensité du champ. En portant dans un même champ diverses petites sphères d'épreuve, on définit les charges de ces sphères, comme des coefficients d'influence à leur attribuer, en tant qu'elles subissent la force d'origine électrique. Les rapports des intensités de champ observées sont indépendants de la sphère d'épreuve utilisée. Les rapports des charges des sphères d'épreuve sont indépendants du champ qui sert à l'expérience. Le champ

Digitized by Google

caractérise l'état du milieu, la charge caractérise l'état de la sphère.

La force mécanique F agissant sur une charge q dans un champ E pourra donc, par un choix convenable d'unité, être mise sous la forme

$$F = qE.$$

q est une quantité scalaire, E est un vecteur dont la direction est celle de F.

Quelles sont les lois auxquelles obéit la distribution du vecteur E?

1. En premier lieu, il y a le fait de l'existence d'un potentiel, d'où

$$\text{rot}\, E = 0;$$

2. En second lieu, il y a le fait de la conservation et de l'indestructibilité de l'électricité. Par exemple, si des corps électrisés sont situés à l'intérieur d'une surface fermée (S), tracée par la pensée au sein du champ électrique, et si l'on mesure le flux du vecteur E sortant de cette surface, le flux total reste constant quand on déplace d'une façon quelconque à son intérieur les divers corps électrisés, et cela même si on laisse quelques-uns des conducteurs venir en contact les uns avec les autres, produisant ainsi des décharges et des étincelles. Tant que la surface (S) reste invariable au sein du milieu isolant constitué par l'air ambiant, le flux total reste invariable. Si, d'ailleurs, je trace dans le milieu isolant une seconde surface (S′) telle que je puisse déformer (S) d'une façon continue et l'amener en coïncidence avec (S′) sans rencontrer de corps électrisé, les flux à travers (S) et à travers (S′) sont égaux l'un à l'autre.

Autrement dit, la quantité

$$\int (E\nu)\, dS,$$

où E est le champ électrique, ν le vecteur unité normal à dS, dirigé vers l'extérieur du volume enveloppé (U), reste invariable, soit qu'on déplace à l'intérieur de (S) les corps électrisés, soit qu'on déforme (S) sans rencontrer de tels corps.

3. L'ensemble des expériences que nous venons de décrire suppose que le milieu est un certain milieu invariable.

Si, laissant toutes les autres choses égales d'ailleurs, on opère

Digitized by Google

dans un milieu isolant différent; si, par exemple, on porte les corps électrisés qui se trouvaient baignés par l'air dans un autre milieu isolant, le pétrole par exemple, qu'on les y plonge tous, on constate que l'intégrale que nous venons de considérer,

$$\int (\mathrm{E}\nu)\, d\mathrm{S},$$

appliquée à une surface tracée dans le pétrole de façon à entourer tous les corps électrisés primitifs et dans laquelle le vecteur E représente la nouvelle intensité de champ, observée toujours en se servant des mêmes sphères d'épreuve que dans les expériences faites au sein de l'air atmosphérique, sans rien changer à leur état d'électrification, on constate, dis-je, que cette intégrale a changé de valeur. Mais le rapport qu'il y a entre sa nouvelle valeur et l'ancienne ne dépend que de la nature des deux milieux isolants (l'air et le pétrole par exemple), car il est indépendant de la composition du système électrisé en expérience. En répétant l'expérience dans divers milieux (A, A', A'', ...), on voit qu'on peut attribuer à chaque milieu un coefficient d'influence (k, k', k'', ...) tel que pour chacun d'eux l'intégrale

$$\mathrm{Q} = \int \left(\frac{k\,\mathrm{E}\nu}{4\pi}\right) d\mathrm{S}$$

reste invariable quand on passe d'un milieu dans un autre sans changer l'état d'électrification des corps électrisés situés à l'intérieur de la surface d'intégration.

On peut, dès lors, imaginer, pour plus de généralité, que k soit une fonction des coordonnées de l'élément $d\mathrm{S}$; cela est nécessaire si l'on suppose que la surface (S) est tracée de façon à couper divers milieux isolants, et alors on admet que l'intégrale reste encore invariable; cette quantité Q caractérise en fin de compte la *quantité* d'électricité.

4. Je pose

$$\mathrm{D} = \frac{k\,\mathrm{E}}{4\pi}$$

et j'appelle D le déplacement. *Cette dénomination tire son origine d'une représentation mécanique proposée par Maxwell que nous ne reproduisons pas.* Si j'applique la transformation d'Ostrogradski,

Digitized by Google

j'aurai

$$\int (D_\nu)\, dS = \int \operatorname{div} D\, d\varpi,$$

et j'appellerai la quantité e définie par l'égalité

$$e = \operatorname{div} D$$

la densité de la quantité d'électricité.

5. En résumé, si l'on considère un petit corps dans un certain état d'électrification, état qui subsiste et persiste tant que ce petit corps demeure entouré par des isolants parfaits, je lui ai attribué un coefficient d'influence q que j'ai appelé sa *charge* électrique, en tant que ce coefficient caractérisait l'état d'électrification du corps employé comme corps d'épreuve dans l'exploration d'un champ électrique; et, comme d'autre part ce petit corps d'épreuve peut lui-même être envisagé comme produisant autour de lui un champ électrique qu'on peut explorer à son tour, je lui ai attribué une *quantité d'électricité* déterminée, laquelle est définie par une intégrale de surface. Il restera donc à démontrer, pour justifier nos dénominations, que la charge et la quantité d'électricité sont des grandeurs physiques toujours proportionnelles. C'est ce qui résulte de la loi de l'action et de la réaction, comme nous allons le voir.

Considérons deux petits corps d'épreuve A et A', ayant les coefficients d'influence q et q' et portant les quantités d'électricité Q et Q'.

L'expérience montre que le champ produit par A en A' est

$$\frac{1}{k}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{(loi de Coulomb)}$$

et la force exercée sur A' est par suite

$$\frac{1}{k}\frac{Q}{r^2}\, q'.$$

De même le champ produit par A' en A est

$$\frac{1}{k}\frac{Q'}{r^2}$$

et la force exercée sur A est

$$\frac{Q'q}{kr^2}.$$

Digitized by Google

D'après le principe rappelé, ces deux actions doivent être égales et directement opposées; on a donc

$$\frac{Q}{q} = \frac{Q'}{q'},$$

ce qui démontre la proposition, à condition que, dans ce cas particulier, Q et Q′ représentent bien les quantités d'électricité, d'après notre définition. Or, si je pose

$$E = \frac{1}{k}\frac{Q}{r^2}\nabla_r$$

(∇_r est le vecteur unité suivant r), j'ai bien

$$\int\left(\frac{kE_\nu}{4\pi}\right)dS = \int\frac{Q}{4\pi r^2}(\nabla_r, \nu)dS = \int Q\,\frac{\cos(r,\nu).dS}{4\pi r^2} = Q,$$

car $\cos(r, \nu)\,\frac{dS}{r^2}$ est l'angle solide $d\omega$ sous lequel on voit dS en se plaçant en A, à l'origine des rayons vecteurs, et comme la surface entoure complètement A où se trouve Q, on a

$$\int d\omega = 4\pi.$$

Digitized by Google

CHAPITRE III.

LES LOIS : LOI D'OHM, LOI DE LAPLACE, LOI DE L'INDUCTION.

J'aborde ici les propriétés générales du champ électrique. Je définis la charge superficielle, je justifie l'emploi du plan d'épreuve, je distingue le pouvoir inducteur électrique k qui est une grandeur physique que l'on peut choisir, si l'on veut, pour la grandeur électrique qu'il est nécessaire d'ajouter aux grandeurs longueur, temps et masse, pour avoir les formules de dimensions des diverses grandeurs électriques, du nombre ε qui est le rapport de k pour un milieu considéré à la valeur k_0 que prend k dans un milieu particulier, tel que l'air raréfié, pris comme milieu de référence. Tandis que k est une grandeur, ε n'étant qu'un rapport est un pur nombre.

Je passe ensuite à l'électromètre qui permet d'étudier le champ électrique, non seulement dans l'air, mais encore dans les milieux fluides parcourus par des courants et à la surface des conducteurs solides, dans ce même cas.

L'électromagnétisme est l'étude du champ magnétique dû aux courants permanents. Le rotationnel de ce champ donne une définition précise de l'intensité du courant. On voit que le flux de courant se conserve et la loi de Laplace se déduit immédiatement des formules de Vaschy.

La loi d'Ohm établit une relation entre le vecteur courant qui dépend du champ magnétique et le vecteur champ électrique à l'intérieur d'un conducteur.

Quand en un point la loi d'Ohm n'est pas satisfaite, cela tient le plus souvent à la présence d'une force électromotrice locale qui trouve sa définition dans l'écart constaté.

Je déduis ensuite l'expression de la résistance; et la loi d'Ohm pour un circuit fermé.

Digitized by Google

Je traite ensuite de la décharge lente du condensateur.

L'étude des forces d'origine électrique et électromagnétique repose sur l'application répétée du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, puisque l'exploration du champ a déjà donné l'action des corps électrisés ou des courants sur les charges d'épreuve ou sur les aimants d'épreuve.

Il y a d'ailleurs lieu d'examiner ce qui arrive si la charge d'épreuve, au lieu d'être en repos, se trouve en mouvement.

L'exploration des champs variables avec un petit circuit d'épreuve permet de découvrir les lois de l'induction électromagnétique.

Je montre ensuite ce qu'il faut entendre par équivalence des courants et des aimants.

Dans l'hypothèse où les aimants ne sont autres que de petits courants particulaires, le rotationnel de leur potentiel vecteur est égal à l'induction magnétique.

C'est une propriété importante, donnée par Maxwell presque sans démonstration, et que Poincaré a démontrée tout au long; l'emploi des formules de Vaschy permet d'abréger et de simplifier les calculs.

Je montre ensuite que le potentiel vecteur n'est autre chose que l'impulsion de la force électromotrice au point considéré.

Je termine par cette propriété la théorie ordinaire de l'induction.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU CHAMP ÉLECTRIQUE.

1. *Milieux isolants non électrisés.* — L'existence du potentiel donne la relation

$$\operatorname{rot} E = 0$$

valable en tout point du champ.

L'absence supposée de charges au sein du milieu donne

$$e = 0 \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{div} D = 0.$$

2. *Équilibre électrostatique de conducteurs bien isolés.* — En un point quelconque du milieu, on a d'abord

$$\operatorname{div} D = e.$$

Quelle est la condition à la surface? C'est que le champ y soit normal à la surface du conducteur.

Digitized by Google

Par exemple, le champ à la surface d'une sphère y est radial, quelles que soient les charges extérieures à l'influence desquelles la sphère conductrice se trouve soumise.

Si ν est le vecteur unité normal à la surface en un point quelconque, on a

$$[\nu \mathrm{E}] = 0.$$

C'est là un résultat d'expérience.

Le vecteur E étant normal à la surface, l'intégrale

$$\int (\mathrm{E}\, ds)$$

est nulle le long de toute portion de la ligne tracée à la surface d'un conducteur. La surface du conducteur est donc équipotentielle.

Soit, d'autre part, Q la charge d'un conducteur, on aura

$$\mathrm{Q} = \int \left(\frac{k\mathrm{E}}{4\pi}, \nu\right) d\mathrm{S}.$$

Si Q est donné, ces diverses conditions suffisent pour déterminer la distribution du vecteur E.

3. *Densité superficielle.* - Reportons-nous à l'application du théorème de Vaschy; la surface d'un conducteur est une des surfaces qui limitent le volume U du champ; elle n'intervient que par les masses σ et τ. Or, nous venons de voir que τ est nul. Il reste donc

$$4\pi\sigma = (\nu \mathrm{E}).$$

La quantité $k\sigma$ porte le nom de *densité superficielle*, on a, en effet,

$$\int k\sigma\, d\mathrm{S} = \int \left(\frac{k\mathrm{E}}{4\pi}, \nu\right) d\mathrm{S} = \mathrm{Q}.$$

La charge Q peut donc être considérée comme la somme des quantités

$$k\sigma\, d\mathrm{S}.$$

4. *Plan d'épreuve.* - Considérons un élément superficiel $d\mathrm{S}$ conducteur et traçons dans le volume du conducteur une petite surface qui s'appuie sur le contour de $d\mathrm{S}$ de façon à envelopper avec $d\mathrm{S}$

Digitized by Google

un élément de volume $d\varpi$. Imaginons qu'une véritable coupure soit pratiquée suivant cette surface de façon que l'élément $d\varpi$ soit détachable du reste du conducteur. Au moment précis où la coupure s'ouvre, comme elle est à l'intérieur du conducteur, l'expérience de

Fig. 5.

la cage de Faraday nous apprend que le champ y est nul, de sorte que la quantité d'électricité q emportée avec cet élément de volume se réduit à la quantité $k\sigma\, dS$ portée par l'élément de surface.

C'est le principe de l'emploi du plan d'épreuve.

5. *Cas des diélectriques polarisés.* — Il y a des milieux qui sont naturellement le siège d'une polarisation électrique : c'est le cas de l'intérieur d'un cristal de tourmaline.

La théorie est analogue à celle des aimants permanents.

Le champ électrique E joue le rôle de l'intensité du champ magnétique H. L'induction électrique D joue le rôle de l'induction magnétique.

6. *Cas des milieux polarisés par influence.* — Ce cas est le cas ordinaire.

Si I_e est le moment diélectrique, on aura, en général,

$$I_e = \chi E,$$

d'où

$$D' = E + 4\pi\chi E,$$

et si l'on pose

$$D' = \frac{\varepsilon E}{4\pi},$$

on aura

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi;$$

le nombre ε porte le nom de *constante diélectrique* ou de *pouvoir inducteur spécifique*.

Le déplacement électrique D a pour valeur $\frac{k\mathrm{E}}{4\pi}$.

Soit k_0 la valeur de k pour l'air, le rapport

$$\varepsilon = \frac{k}{k_0}$$

Digitized by Google

est souvent employé à la place de k. Si c est la vitesse de propagation des ondulations électriques dans l'air, et si l'on appelle μ_0 la perméabilité magnétique de l'air, on a, comme nous le verrons plus tard,

$$c = \frac{1}{\sqrt{k_0 \mu_0}}.$$

Mais, dans le système électromagnétique, on fait

$$\mu_0 = 1,$$

d'où

$$k_0 = \frac{1}{c^2}.$$

On pourra donc écrire

$$k = \frac{\varepsilon}{c^2}.$$

Et nous remarquerons que ε est un simple nombre (un rapport de deux grandeurs de la même espèce), tandis que k est une grandeur physique qui a pour formule de dimensions $L^{-2}T^2$.

7. *Électromètre.* — J'admets maintenant comme connus la théorie et l'emploi de l'électromètre.

La différence de potentiel $V_B - V_A$ marquée par l'instrument n'est autre que la valeur de l'intégrale

$$\int_A^B (E\, ds)$$

prise le long d'un chemin allant de A à B et tracé dans l'air.

Soit l la longueur de la ligne d'intégration, $\frac{V_B - V_A}{l}$ est la valeur moyenne de la composante tangentielle du champ.

Si les points A et B sont infiniment voisins et l le chemin rectiligne infiniment petit de A à B, $\frac{V_B - V_A}{l}$ n'est autre que la composante du champ suivant la direction AB.

8. *Conducteurs parcourus par des courants permanents.* — Soient A et B deux points infiniment voisins à l'intérieur d'une masse conductrice parcourue par des courants permanents. Je trace de A à B un petit canal rectiligne dans la substance conductrice et je le remplis d'air. Puis, au moyen de petits canaux par lesquels je fais passer des

Digitized by Google

fils de secours, je prends la différence de potentiel entre les points A et B du conducteur. Comme la surface des fils de secours est en équilibre électrostatique et que les canaux pratiqués font varier infiniment peu la distribution du courant à l'intérieur de la masse conductrice, si $V_B - V_A$ est l'indication de l'électromètre et si l est la distance AB, la quantité

$$\frac{V_B - V_A}{l}$$

mesure, dans les conditions indiquées, la composante tangentielle du champ électrostatique suivant AB, observé dans le canal AB.

Observation. — Pour observer le champ électrique à l'intérieur d'un milieu fluide parcouru par un courant, en nous servant d'une petite sphère d'épreuve, il nous faudrait tracer, par exemple, à partir du point A, un petit canal, remplacer le fluide par l'air et faire l'expérience qui consiste à observer la composante longitudinale du champ électrique en A. On obtiendrait le même résultat en se servant de l'électromètre pour mesurer la différence de potentiel entre les deux extrémités A et B de ce canal, supposé d'ailleurs infiniment petit.

On pourrait reporter l'électromètre en dehors du fluide et relier ses armatures aux points A et B par des fils de secours bien isolés, sauf à leurs extrémités mêmes, puisque celles-ci doivent servir à prendre le contact. La différence de potentiel mesurée conserve la même valeur, quelque délié que soit le canal AB; elle reste encore la même quand ce canal est rempli du fluide constitutif du conducteur. C'est là l'avantage de l'électromètre. Il remplace l'expérience théorique, plutôt conçue que réalisée, de l'observation dans un petit canal purgé du fluide conducteur, par une expérience équivalente facilement praticable. La distribution peut ainsi être facilement observée au sein d'un fluide conducteur, comme à la surface d'une plaque. J'admets que ces résultats s'étendent à un milieu conducteur solide. Mais remarquons que l'électromètre donne, non le champ, mais la composante tangentielle.

9. *Définition du vecteur champ dans un conducteur parcouru par un courant.* — Faisons trois expériences successives en donnant

Digitized by Google

successivement à l'élément AB des directions parallèles à Ox, à Oy et à Oz.

Et soient E_x, E_y, E_z les composantes suivant Ox, Oy et Oz observées respectivement dans ces trois expériences.

Puis allons maintenant du point A au point B infiniment voisin, d'abord directement de A en B en ligne droite dans un petit canal, ensuite en suivant un chemin brisé parallèle successivement à Ox, Oy, Oz. Soit ds le vecteur AB et soient dx, dy, dz ses composantes suivant les axes.

Si nous traçons de petits canaux le long du chemin brisé, nous pourrons donc, tout en restant dans l'air, revenir au point de départ en allant de A en B par le chemin sinueux et en revenant en droite ligne.

Mais, dans l'air, il y a un potentiel; si donc E_s désigne la composante du champ suivant AB, on aura

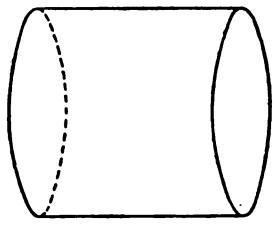
$$(E_s\, ds) = E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz,$$

ce qui prouve que E_s n'est autre que la projection, sur le vecteur ds, du vecteur que l'on pourrait construire sur E_x, E_y, E_z comme composantes. C'est ce vecteur auquel nous donnons le nom de *champ électrique* à l'intérieur d'un conducteur parcouru par un courant permanent.

10. *Potentiel.* — Je dis que ce vecteur E dérive d'un potentiel.

En effet, si je trace un circuit fermé dans la substance conductrice

Fig. 6.



et que j'en fasse un canal infiniment délié rempli d'air, j'aurai

$$\int (E_s\, ds) = 0,$$

puisque le champ électrique, dans l'air, dérive d'un potentiel; mais

Digitized by Google

comme le vecteur que j'appelle E a, en tous les points, même composante tangentielle que le champ électrique réellement observé, on a aussi

$$\int (E\,ds) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Notons maintenant que, lorsque les divers points de l'intérieur d'un conducteur ne sont pas au même potentiel, c'est que ce conducteur est parcouru par un courant, ce qui veut dire qu'on observe aussi dans son voisinage un champ magnétique. Il est donc nécessaire, avant d'aller plus loin dans l'exploration de l'intérieur d'un conducteur, d'exposer les principes de l'Électromagnétisme.

ÉLECTROMAGNÉTISME.

1. ***Potentiel.*** — Les courants produits par des piles engendrent un champ magnétique permanent. Les courants produits par la décharge des condensateurs et par les effets d'induction engendrent un champ magnétique transitoire; mais, le plus souvent, les phénomènes ne varient pas avec une vitesse suffisante, pour qu'on ne puisse à chaque instant considérer le champ magnétique comme dû à la valeur actuelle du courant de conduction qui circule dans les fils conducteurs. Bornons-nous pour le moment au régime permanent.

Le champ magnétique H dû aux courants continue, comme celui produit par les aimants, à dériver d'un potentiel. Cependant, ce potentiel n'est pas uniforme.

Ainsi, supposons la ligne d'intégration telle qu'on puisse la déformer de façon à la rétrécir jusqu'à la concentrer en un seul point sans couper aucun conducteur; alors, on aura

$$\int (H\,ds) = 0.$$

Par conséquent, si un circuit d'intégration (C) peut être déformé de façon à venir en coïncidence avec un circuit d'intégration (C') sans traverser aucun courant, on aura encore deux intégrales égales

$$\int_{(C)} = \int_{(C')}.$$

Si le contour d'intégration est infiniment petit et en dehors de la

Digitized by Google

substance des conducteurs, l'application de la formule de Stokes montre que l'on a

$$\operatorname{rot} H = 0.$$

Mais si la ligne d'intégration embrasse une fois, par exemple, un courant, alors l'intégrale aura une valeur différente de zéro.

Et si le conducteur qui est parcouru par le courant a une section droite infiniment petite et égale à dS, l'intégrale prise le long du contour qui borde dS sera, d'après la formule de Stokes,

$$\int (H\, ds) = \operatorname{rot} H\, dS$$

et ne sera pas nulle.

2. *Vecteur courant.* — Cette intégrale restera invariable si l'on élargit le chemin d'intégration, mais de façon qu'il continue à n'entourer que le courant considéré et à ne faire qu'un tour autour de lui.

Cette quantité rot H est donc caractéristique du courant; elle se présente sous la forme d'une densité vectorielle. Je poserai

$$C = \frac{\operatorname{rot} H}{4\pi}$$

d'une façon générale, et j'appellerai C le vecteur courant.

3. *Conservation du flux.* — Il convient, cependant, de justifier tout d'abord cette désignation. Or, quel que soit le vecteur H, on a toujours

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} H = 0,$$

de sorte que l'on a

$$\operatorname{div} C = 0.$$

C'est-à-dire que $C\,dS$ se comporte comme le flux d'un fluide incompressible.

Encore faut-il qu'il ne s'échappe rien par la surface du conducteur. C'est ce qui résulte de la continuité du vecteur H à la surface d'un conducteur quelconque. L'expérience est facile à faire avec une substance conductrice fluide, comme le sulfate de cuivre par exemple.

Pour montrer que la composante normale de C est nulle, considérons un feuillet infiniment petit de surface $d\Sigma$, plaçons-le à la surface du conducteur, parallèlement à cette surface et de façon que l'une des

Digitized by Google

faces du feuillet soit à l'extérieur, tandis que l'autre face sera à l'intérieur. Soit Γ' le contour de la face extérieure et Γ'' le contour de la face intérieure. Dans l'air, en vertu de l'existence du potentiel, on aura

$$\int_{\Gamma'} (\mathrm{H}\, ds) = \mathrm{rot}_\nu \mathrm{H}\, d\Sigma = 0$$

et, à l'intérieur, on aura

$$\int_{\Gamma''} (\mathrm{H}\, ds) = \int_{\Gamma'} (\mathrm{H}\, ds),$$

parce que H est continu.

On aura donc aussi, à l'intérieur du conducteur, mais au voisinage de la surface,

$$\mathrm{rot}_\nu \mathrm{H} = 0.$$

La composante normale de C est nulle.

Si donc je considère deux sections S et S' d'un conducteur parcouru par un courant et la surface latérale Σ, le théorème d'Ostrogradski nous donne

$$\int_{S+S'+\Sigma} (\mathrm{C}\nu)\, dS = \int \mathrm{div}\, \mathrm{C}\, d\varpi$$

ou

$$\int (\mathrm{C}\nu)\, dS = \text{const.}$$

pour une section quelconque du conducteur, parce que l'intégrale de volume disparaît, la divergence de C étant nulle, et que le flux à travers la surface latérale disparaît également, le vecteur C restant tangentiel.

Donc, le flux de C se conserve : c'est la justification du mot *courant*.

4. A l'extérieur comme à l'intérieur d'un conducteur parcouru par un courant, quand la substance de ce conducteur n'est pas une matière magnétique, on a toujours

$$\mathrm{B} = \mathrm{H},$$

et la propriété caractéristique de B, qui s'écrit ici

$$\mathrm{div}\, \mathrm{H} = 0,$$

subsiste dans tous les cas.

Digitized by Google

3. *Loi de Laplace.* - Les courants se mesurent au moyen du galvanomètre. L'action sur un pôle d'aimant est conforme à la loi de Laplace. Les fondateurs de l'Électromagnétisme montraient que cette action est la même, au voisinage d'un circuit, en tous les points de ce circuit. Ils localisaient dans ce circuit la cause des actions à distance et l'expérience leur a donné la loi de Laplace.

Nous venons déjà de retrouver la notion de courant; appliquons maintenant le théorème de Vaschy et voyons où doivent être placés les masses scalaires ou vectorielles, pour qu'on puisse considérer le champ magnétique comme résultant de leur action.

Tout d'abord, reculons suffisamment la surface extérieure qui enveloppe le champ; en tous ses points, le champ y sera nul et nous n'aurons pas à considérer les masses σ et τ qui pourraient s'y rapporter. Les masses σ et τ ne peuvent pas non plus se trouver à la surface des conducteurs, puisque cette surface n'est pas une surface de discontinuité pour le champ H, les masses newtoniennes ρ n'entrant pas non plus en ligne de compte, puisque l'on a partout

$$\operatorname{div} \mathrm{H} = 0$$

et que ρ est égal à $\frac{\operatorname{div} \mathrm{H}}{4\pi}$. En résumé, si je pose

$$\mathrm{A} = \int \frac{\mathrm{C}\, d\varpi}{r}$$

avec

$$4\pi \mathrm{C} = \operatorname{rot} \mathrm{H},$$

la quantité C représentera le vecteur μ de la théorie de Vaschy et il restera

$$\mathrm{H} = \operatorname{rot} \mathrm{A},$$

de sorte que H est le vecteur résultant d'actions laplaciennes provenant des masses fictives $\mathrm{C}\, d\varpi$.

Ces masses fictives $\mathrm{C}\, d\varpi$ ne sont donc autre chose que les éléments de courant des fondateurs de l'Électrodynamique et l'analyse que nous avions faite du champ nous a déjà montré qu'elles se situent à l'intérieur des conducteurs.

Nous étant donné la loi d'action, nous arrivons à situer les masses. Les anciens se donnaient les éléments de courant et ils déduisaient la loi d'action de l'étude du champ. Les deux procédés sont inverses l'un de l'autre. Mais la notion de champ est une notion expérimen-

Digitized by Google

tale, tandis que la notion de courant ne se conçoit guère sans quelque hypothèse sur la nature intime du phénomène, si l'on veut le définir en dehors de l'action magnétique.

Dans la théorie de Vaschy, les masses $C\,d\varpi$ ne sont que des expressions mathématiques, des masses fictives. Mais il est remarquable de constater que là où se trouvent ces masses vectorielles se passent des phénomènes caractéristiques locaux : échauffement, transports d'ions, etc. Ce sont autant de propriétés expérimentales remarquables, mais sans généralité. Le courant de déplacement dans le vide ne donne pas d'échauffement ; dans un conducteur métallique, il n'y a pas déplacement d'ions, mais d'électrons, etc.

6. *Loi d'Ohm.* — Bornons-nous au cas des corps conducteurs parcourus par des courants permanents. Nous avons défini déjà le vecteur E champ électrique et nous venons de définir le vecteur C courant électrique. En général, dans un milieu isotrope, on aura, en appelant c une constante,

$$\mathbf{C} = c\mathbf{E}$$

ou

$$4\pi c\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{H}.$$

Cette loi est la loi d'Ohm et c est la conductibilité électrique spécifique.

Dans un milieu cristallin, il faut remplacer la constante c par une fonction vectorielle linéaire.

Dans un détecteur, la loi d'Ohm ne tient plus.

7. *Résumé des lois de l'Électrocinétique.* — Dans un conducteur, on a

$$\operatorname{div}\mathbf{C} = 0.$$

Comme C est proportionnel à E (loi d'Ohm) et que E dérive d'un potentiel, on a

$$\operatorname{rot}\mathbf{C} = 0.$$

Comme C est tangent à la surface des conducteurs, on a

$$(\nu\mathbf{C}) = 0,$$

ν étant le vecteur unité normal à la surface latérale.

On pourra achever la détermination de C, en se donnant par

Digitized by Google

exemple deux surfaces transverses équipotentielles, avec la valeur du potentiel sur chacune d'elles.

Le problème de la distribution du courant sera ainsi défini.

Le champ électrique étant alors connu à la surface latérale, le potentiel y sera déterminé et le problème de la détermination du champ électrique extérieur sera alors possible : c'est le problème de Dirichlet.

Le champ magnétique extérieur est connu : c'est

$$\mathrm{H} = \mathrm{rot}\,\mathrm{A},$$

comme nous l'avons vu précédemment.

8. Il se peut qu'en un point d'un milieu, par suite de quelque hétérogénéité dans la substance ou de quelque réaction chimique locale, ou par le simple effet de la température, il y ait, en dehors du champ électrique E, une force électromotrice locale. En ce cas, on aura généralement

$$\mathrm{C} = c(\mathrm{E} + \mathrm{E}').$$

Le vecteur E′ étant localisé au point considéré.

9. *Force électromotrice.* — De l'équation

$$\mathrm{C} = c(\mathrm{E} + \mathrm{E}'),$$

je déduis

$$\int (\mathrm{E}\,ds) = \int \frac{\mathrm{C}}{c}\,ds - \int (\mathrm{E}'\,ds).$$

Appliquons cette formule au cas d'un conducteur filiforme. Soit S la section droite du conducteur. Elle pourra ne pas être la même en tous les points. La condition d'incompressibilité du vecteur C montre que sa valeur absolue $|\mathrm{C}|$ doit varier en raison inverse de la section droite, on pourra donc poser

$$|\mathrm{C}| = \frac{i}{\mathrm{S}},$$

i étant une quantité constante le long du fil. Appelons dl la valeur absolue du vecteur ds, et il viendra, en posant

$$\int (\mathrm{E}'\,ds) = \mathcal{E},$$

Digitized by Google

l'équation ci-après :

$$\int (\mathrm{E}\,ds) = i\int \frac{dl}{c\mathrm{S}} - \mathcal{E},$$

dans laquelle l'intégrale

$$\int \frac{dl}{c\mathrm{S}} = \mathrm{R}$$

prend le nom de *résistance ohmique*, tandis que $\mathcal{E}$ s'appelle la *force électromotrice* (f. e. m.).

Quand le courant est produit par des piles et que le régime permanent est établi, on a toujours un potentiel et il vient pour un circuit fermé

$$\int (\mathrm{E}\,ds) = 0,$$

d'où

$$\mathcal{E} = i\mathrm{R},$$

ce qui est l'expression courante de la loi d'Ohm. Les vecteurs ε paraissent localisés sur certaines surfaces, celles qui séparent les conducteurs de différente nature.

Décharge du condensateur. — Considérons le circuit de décharge d'un condensateur. Appelons A et B ses armatures. Supposons le conducteur de décharge homogène. Nous avons

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{C}}{c}.$$

Intégrons le long du conducteur de A à B dans le sens du courant. Nous avons

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\mathrm{E}\,ds) = i\mathrm{R},$$

R étant la résistance du fil qui relie les armatures.

Or, très souvent, la décharge est assez lente pour qu'on ait toujours un état du champ électrique infiniment peu différent d'un état d'équilibre. Alors, le long de tout circuit fermé, on a

$$\int (\mathrm{E}\,ds) = 0.$$

Complétons le circuit d'intégration en allant de l'armature B à l'armature A. Soient E_1 l'intensité du champ dans le conducteur,

Digitized by Google

E_2 l'intensité du champ dans le diélectrique interposé entre les armatures; on a

$$\int_A^B (E_1\, ds) + \int_B^A (E_2\, ds) = 0,$$

$$\int_B^A (E_2\, ds) = V_B - V_A ;$$

d'où

$$\int_A^B (E_1\, ds) = iR = -\int_B^A (E_2\, ds) = V_A - V_B$$

ou

$$V_A - V_B = iR.$$

Mais si la décharge est assez rapide, ce calcul ne peut être considéré que comme approché et, en réalité, on n'a plus alors un vecteur E jouissant de la propriété de dériver d'un potentiel.

Le fait même qu'il y a un courant montre qu'alors il existe un champ magnétique et que, par suite, il doit y avoir une relation entre l'apparition d'un champ magnétique et l'existence d'un rotationnel de E différent de zéro.

L'étude de cette relation nous mène à la théorie de l'induction électromagnétique.

LOI DE L'INDUCTION.

Considérons un volume à l'intérieur duquel existe un champ magnétique et qui pourra comprendre certaines régions dans lesquelles le milieu sera constitué par une substance magnétique. Dans ces substances, nous aurons à considérer deux vecteurs B et H. Dans les substances non magnétiques (air, cuivre, etc.), là où nous mettrons B on pourra remplacer, si l'on veut, B par H, puisque, en l'absence de polarisation, les deux vecteurs sont identiques l'un à l'autre.

Envisageons une région très petite de ce volume, un point déterminé et plaçons-y une petite boucle conductrice, j'entends par là un petit circuit conducteur filiforme dont les deux extrémités soient infiniment rapprochées l'une de l'autre. Ce sera, en quelque sorte, un petit circuit d'épreuve. Relions les deux extrémités de la boucle à un galvanomètre en employant des fils de secours déliés, bien isolés, torsadés l'un autour de l'autre.

Digitized by Google

Cela étant, imaginons que, laissant immobile à sa place le petit circuit d'épreuve, nous fassions varier le champ magnétique au point considéré.

Il se produira un courant d'induction i.

Comme on a, d'une façon générale,

$$cC = E + E'. \tag{1}$$

si j'intègre le long d'un chemin fermé comprenant la boucle et le fil galvanométrique, j'aurai, en appelant R la résistance totale du circuit, à un instant t donné,

$$Ri = \int (E\,ds) + \int (E'\,ds). \tag{2}$$

Dans cette équation, je représente par E la force électrique qui peut être due à des corps conducteurs isolés dans le champ. Cette force électrique dérive d'un potentiel et l'on a

$$\int (E\,ds) = 0.$$

J'admets, d'autre part, que, à l'état de repos, il n'y ait aucun courant dans le circuit, qu'il ne comprenne ni force électromotrice thermo-électrique, ni force électromotrice de pile galvanique. Alors E peut être considéré comme représentant la modification du milieu qui transmet les actions électriques en tant que ces actions proviennent de corps éloignés, tandis que E' conservera le caractère de force électromotrice locale.

Il reste donc

$$Ri = \int (E'\,ds). \tag{3}$$

Mais je puis craindre que l'existence même du courant i ne produise un champ magnétique qui influera à son tour sur l'intensité du champ magnétique dans le voisinage de la boucle. Pour éviter cette complication, il me suffira de faire assez grande la résistance du circuit, i diminuera en conséquence et son action perturbatrice pourra être négligée. J'aurai un véritable petit circuit d'épreuve.

D'où proviennent les éléments de l'intégrale du second membre?

Les lois ordinaires des courants électriques, précédemment étudiées, nous montrent que E' est nul en dehors de tout champ magné-

Digitized by Google

tique ou même en présence d'un champ magnétique, pourvu qu'il ne varie pas. Donc, le vecteur E′ doit être considéré comme nul en tous les points du circuit, à l'exception de ceux qui appartiennent à la boucle d'épreuve.

On peut le vérifier aisément en faisant varier à volonté le circuit galvanométrique à partir des extrémités de la boucle. On peut changer le parcours des fils, la nature du galvanomètre, la longueur et la section des fils de secours, etc., ou tout autre élément, tel que la conductibilité, sous réserve que R reste grand et Ri reste invariable.

En ce qui concerne la boucle, il importe de conserver invariable la forme et la position de la courbe géométrique qu'elle épouse, ou tout au moins, si son contour embrasse un petit élément de surface dS, convient-il de n'altérer ni l'orientation, ni la superficie; mais on pourra à volonté modifier la conductibilité et la section du fil conducteur, pourvu que la boucle continue toujours à pouvoir être considérée par rapport à l'élément de surface comme un circuit linéaire infiniment délié.

Dans ces conditions, on a, à chaque instant, la loi suivante :

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{R}\,i = \int (\mathrm{E}'\,ds) = -\frac{d}{dt}\int (\mathrm{B}\nu)\,d\mathrm{S}.$$

La force électromotrice totale Ri, qui n'est autre que l'intégrale de ligne de E′, est égale à la variation instantanée du flux d'induction embrassé.

Appliquons cela à un élément de surface, il reste

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{rot}\,\mathrm{E}' = -\frac{d\mathrm{B}}{dt}.$$

Mais cette relation, après les explications données, nous apparaît comme devant subsister même en l'absence du petit circuit d'épreuve, puisqu'il ne saurait modifier les intensités de grandeurs électriques ou magnétiques observées dans son voisinage immédiat. Sa présence n'est pas nécessaire à la production des phénomènes, elle est nécessaire seulement pour permettre de les déceler.

Cette petite boucle, en elle-même, est tout à fait analogue à un résonateur de Hertz.

Digitized by Google

En résumé, nous admettrons que l'équation (5) tient, en tout point du milieu, en dehors même de toute boucle d'épreuve.

Mais alors, il faut admettre également que E′ est au sein du milieu une grandeur de même nature que E et qu'en réalité $E + E'$ représentera la force électrique totale, le vecteur intensité de champ électrique. Si ψ est le potentiel électrostatique, nous aurons pour la *force électrique totale*, pour le vecteur champ électrique, la valeur

$$-\nabla\psi + E'.$$

Nous allons transformer cette équation (5), mais auparavant, il convient de tenir compte de l'explication des phénomènes magnétiques donnée par Ampère et de montrer l'équivalence des courants et des aimants. Nous obtiendrons ainsi l'expression de B en fonction des courants particulaires qui, dans cette théorie, tiennent lieu des masses magnétiques. Plus tard, en abordant les théories moléculaires, nous préciserons ce point de vue.

ÉQUIVALENCE DES COURANTS ET DES AIMANTS.

Envisageons un aimant. Soit I l'intensité d'aimantation en un point. Je me propose d'appliquer le théorème de Vaschy au champ du vecteur I. Ce vecteur a une certaine valeur à l'intérieur de l'aimant, il est nul tout autour. La surface qui intervient dans le théorème de Vaschy comprend tout d'abord la surface qui limite le champ, nous la reculerons au delà du champ magnétique produit par l'aimant. Elle comprend ensuite les surfaces de discontinuité. La surface de l'aimant est une de ces surfaces. Le vecteur unité ν sera supposé dirigé vers l'intérieur de l'aimant. J'appellerai $\overline{B}$ et $\overline{H}$ les discontinuités de B et de H à la surface de l'aimant. La composante normale de B est continue, c'est la composante tangentielle de H qui l'est.

Cela admis, je pose

$$\mu = -[\nabla I], \qquad \rho = -(\nabla I), \qquad \tau = -[\nu I], \qquad \sigma = -(\nu I).$$

J'ai, d'ailleurs,

$$B = H + 4\pi I,$$

d'où

$$[\nabla B] = [\nabla H] + 4\pi[\nabla I];$$

or

$$[\nabla H] = 0;$$

Digitized by Google

d'où

$$4\pi\mu = -[\nabla B].$$

De même

$$(\nabla B) = (\nabla H) + 4\pi(\nabla I),$$

or

$$(\nu B) = 0,$$

d'où

$$4\pi\rho = (\nabla H).$$

De même encore, j'ai

$$\overline{B} = \overline{H} + 4\pi I,$$

d'où

$$[\nu \overline{B}] = [\nu \overline{H}] + 4\pi[\nu I];$$

mais

$$[\nu \overline{H}] = 0,$$

donc

$$[\nu \overline{B}] = -4\pi\tau$$

et enfin

$$(\nu \overline{B}) = (\nu \overline{H}) + 4\pi(\nu I).$$

Or

$$(\nu \overline{B}) = 0,$$

d'où

$$(\nu \overline{H}) - 4\pi\sigma = 0.$$

En résumé, on a, également,

$$4\pi\mu = -[\nabla B], \qquad 4\pi\rho = (\nabla H), \qquad 4\pi\tau = -[\nu \overline{B}], \qquad 4\pi\sigma = (\nu \overline{H}).$$

Les quantités exprimées primitivement en fonction de I le sont aussi en fonction, soit du vecteur B, soit du vecteur H.

Cela posé, soient V le potentiel scalaire dépendant de σ et de ρ. A le potentiel vecteur dépendant de τ et de μ.

Puisque, à l'intérieur de l'élément, on a

$$I = 0,$$

il vient

$$0 = \operatorname{grad} V + \operatorname{rot} A.$$

Mais, d'après la théorie de Sir William Thomson (Lord Kelvin), on a aussi bien à l'extérieur de l'aimant qu'à son intérieur

$$H = \operatorname{grad} V.$$

On a donc

$$H = \operatorname{rot}(-A).$$

Ce qui prouve que les masses vectorielles $-\mu\, d\varpi$ et $-\tau\, dS$ équivalent aux masses $\rho\, d\varpi$ et $\sigma\, dS$ agissant suivant la loi de Coulomb.

Digitized by Google

Les masses vectorielles agissent suivant la loi de Laplace et représentent des courants.

Pour montrer qu'elles se distribuent en filets, il suffit de remarquer que l'on a

$$\operatorname{div}\mu = 0,$$

puisque μ est un rotationnel.

Une démonstration analogue s'applique à la distribution du vecteur τ à la surface de l'aimant.

Soit, en effet, tracé sur cette surface un contour fermé dont j'appelle $\nu_1\,\delta s$ l'élément, ν_1 étant sa direction. La direction de la normale au contour, tracée sur la surface, sera celle du vecteur unité $[\nu\nu_1]$, et le flux du vecteur τ sera

$$\int(\tau[\nu\nu_1])\,\delta s = \int(\nu\,\mathrm{H}[\nu\nu_1])\,\delta s = -\int(\mathrm{H}\nu_1)\,\delta s = 0,$$

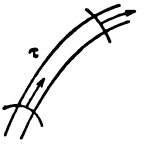
puisque l'on a

$$[\nu[\nu\nu_1]] = \nu(\nu\nu_1) - \nu_1(\nu\nu) \qquad \text{avec} \qquad (\nu\nu_1) = 0, \qquad (\nu\nu) = 1$$

et que H dérive d'un potentiel, de sorte que l'intégrale de ligne est nulle, si le contour est fermé.

Les lignes tangentes au vecteur τ à la surface de l'aimant sont donc

Fig. 4.



des lignes de flux, le long desquelles le flux se conserve entre deux lignes voisines.

Je dis maintenant que si l'on appelle, comme nous l'avons fait jusqu'ici, $-\mathrm{A}$ le potentiel vecteur des masses vectorielles $-\mu\,d\varpi$ et $-\tau\,d\mathrm{S}$, on a

$$\operatorname{rot}(-\mathrm{A}) = \mathrm{B}.$$

En effet, dans l'aimant, on a, d'après la formule de Vaschy,

$$-4\pi\mathrm{I} = \operatorname{grad}\mathrm{V} + \operatorname{rot}\mathrm{A};$$

d'où

$$\operatorname{rot}(-\mathrm{A}) = \operatorname{grad}\mathrm{V} + 4\pi\mathrm{I} = \mathrm{H} + 4\pi\mathrm{I} = \mathrm{B}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Digitized by Google

Donc le potentiel vecteur des courants particulaires a pour rotationnel B.

Soit A_1 le potentiel vecteur des courants finis, on a

$$\text{rot}\, A_1 = H_1.$$

Soient A_2 le potentiel vecteur des courants particulaires et H_2 le champ des aimants, on a

$$\text{rot}\, A_2 = H_2 + 4\pi I;$$

d'où, en additionnant,

$$\text{rot}(A_1 + A_2) = H_1 + H_2 - 4\pi I.$$

Soient A le potentiel vecteur total et H le champ magnétique total, on aura donc

$$\text{rot}\, A = H + 4\pi I$$

ou

$$\text{rot}\, A = B.$$

Utilisons cette relation : nous avons

$$\text{rot}\, E' = -\frac{dB}{dt},$$

d'où

$$\text{rot}\, E' = -\frac{d}{dt}\text{rot}\, A = \text{rot}\left(-\frac{dA}{dt}\right)$$

ou

$$E' = -\frac{dA}{dt} + \Phi,$$

Φ étant un vecteur dont le rotationnel soit nul; mais si le champ est indépendant du temps, on a

$$E' = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dA}{dt} = 0;$$

il doit donc rester

$$E' = -\frac{dA}{dt}$$

et la force électrique totale

$$E + E'$$

sera

$$-\nabla\psi - \frac{dA}{dt}.$$

C'est cette force électrique totale que nous appellerons mainte-

Digitized by Google

nant E puisqu'il n'y a plus de confusion à craindre, et l'on aura

$$E = -\nabla\psi - \frac{dA}{dt}.$$

Supposons que nous créions instantanément le champ magnétique existant, A part de zéro pour atteindre sa valeur finale A et l'on a

$$A = \int E\,dt.$$

Donc :

A est l'impulsion électrique au point considéré : c'est la densité vectorielle de la quantité de mouvement électromagnétique.

En résumé, nous avons acquis une première équation du champ électromagnétique, savoir :

$$\text{rot}\,E = -\frac{dB}{dt}.$$

D'autre part, dans un milieu conducteur, nous avons

$$C = cE = \frac{1}{4\pi}\,\text{rot}\,H$$

dans le cas des champs constants et du régime permanent. Il s'agit de savoir ce que cette équation devient en régime variable.

Il faut, à cet effet, introduire le courant de déplacement $\frac{dD}{dt}$, conformément aux idées de Maxwell.

ÉTUDE DES FORCES DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

Jusqu'à présent, je me suis occupé de la définition des champs, plutôt que de la recherche des forces.

1. *Électrostatique.* — Dans un champ électrostatique, si nous supposons qu'en un point donné la densité de charge soit e, la quantité d'électricité présente dans le volume élémentaire $d\varpi$, si l'on appelle E l'intensité du champ en ce point, sera évidemment

$$E\,e\,d\varpi,$$

et, si la charge $e\,d\varpi$ était animée de la vitesse U, le travail élémentaire de la force intérieure serait

$$(E\,e\,d\varpi\,U\,dt)$$

Digitized by Google

ou

$$(\mathrm{E}e\mathrm{U})\,d\varpi\,dt.$$

Le travail des forces intérieures du champ électrostatique tout entier s'obtiendrait en intégrant dans l'espace et l'on aurait pour résultat

$$dt\int(\mathrm{E}e\mathrm{U})\,d\varpi.$$

2. *Électromagnétisme.* — Nous avons vu quelle était l'intensité du champ dû à un aimant; nous avons introduit à cet effet, dans l'expression du potentiel, les masses $\rho\,d\varpi$ et $\sigma\,d\mathrm{S}$. Par application du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, nous devons pouvoir déterminer l'action qu'un aimant exerce sur un courant, d'après l'action que le courant exerce sur les masses $\rho\,d\varpi$ et $\sigma\,d\mathrm{S}$ par l'intermédiaire du champ magnétique qu'il crée autour de lui. C'est ce que nous allons voir au paragraphe suivant.

Ces expressions des forces sont indispensables au calcul de l'énergie dont nous aurons besoin plus tard.

ACTION DES AIMANTS SUR LES COURANTS.

Après avoir étudié le champ produit par les courants, examinons l'action subie par les courants dans le champ des aimants.

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que la répartition des charges magnétiques; nous allons maintenant nous occuper des forces qui s'exercent entre aimants ou entre aimants et courants.

A cet effet, nous aurons à appliquer à plusieurs reprises le lemme suivant :

Considérons un volume U *limité par une surface* S. *Ce volume est le champ d'un vecteur* H *et également le champ d'un vecteur* H'. *Ces vecteurs sont finis et continus et ont des dérivées partielles déterminées à l'intérieur du volume* U. *J'appelle* ν *le vecteur unité normal à* S *dirigé vers l'intérieur de* U.

Je pose :

$$\begin{aligned}
4\pi\sigma &= (\nu\mathrm{H}), & 4\pi\sigma' &= (\nu\mathrm{H}'),\\
4\pi\tau &= [\nu\mathrm{H}], & 4\pi\tau' &= [\nu\mathrm{H}'],\\
4\pi\rho &= (\nabla\mathrm{H}), & 4\pi\rho' &= (\nabla\mathrm{H}'),\\
4\pi\mu &= [\nabla\mathrm{H}], & 4\pi\mu' &= [\nabla\mathrm{H}'].
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Dans ces conditions, on a la double identité

$$\int_U \left\{ H\rho' + [\mu' H] + H'_\rho + [\mu H'] \right\} d\omega = -\int_S \left\{ H\sigma' + [\tau' H] \right\} dS$$
$$= -\int_S \left\{ (H'\sigma + [\tau H'] \right\} dS.$$

J'admets cette formule sans démonstration. La démonstration n'offre aucune difficulté.

Envisageons tout d'abord un aimant en présence d'un pôle magnétique. Les divers aimants de moment $I\,d\varpi$ qui le composent produisent auprès du pôle le même potentiel que les masses ρ et σ que nous avons déterminées. Inversement, ce pôle produira sur l'aimant la même action que son champ sur les masses ρ et σ.

Cela posé, soit H′ le champ dû à un courant et soit H le champ dû à un aimant. Le champ du courant exercera sur l'aimant la force F ci-après :

$$F = \int H'\rho\, d\varpi + \int H'\sigma\, dS,$$

où l'intégrale de volume s'applique au volume de l'aimant et l'intégrale de surface à la surface de l'aimant. Mais comme, en dehors de l'aimant, ρ est nul et que l'on peut avoir à considérer une surface qui enveloppe tout le champ, qui soit placée en quelque sorte au delà du champ, là où le champ H dû à l'aimant peut être considéré comme nul et où, par conséquent, on a

$$4\pi\sigma = (\nu H) = 0,$$

rien n'empêche de supposer que l'intégration soit étendue à tout l'espace.

D'autre part, si l'on considère le champ H′ dû au courant, on a un champ H′ continu partout, de sorte que les masses σ' et τ' sont nulles à la surface de l'aimant ; à cause de son recul hors du champ, la surface extérieure qui enveloppe le volume U n'intervient pas non plus ; σ' et τ' y sont nuls, parce que H′ y est nul. Comme il s'agit d'un courant circulant dans un conducteur non magnétique, on a partout

$$B' = H',$$

d'où

$$\operatorname{div} H' = \operatorname{div} B' = 0 \quad (1) \qquad \text{ou} \qquad \rho' = 0,$$

(1) Si l'on n'a que du magnétisme induit, on aura $B = \mu H$. Si l'on peut supposer

Digitized by Google

et, par suite, il n'y a pas d'autres masses dues au courant que $\frac{\operatorname{rot} H'}{4\pi} = C$, qui joue le rôle de μ'. On a donc, d'après la formule du lemme,

$$\int [CH]\, d\varpi + \int \{ H'\rho + [\mu H'] \}\, d\varpi = \int \{ H'\sigma + [\tau H'] \}\, dS.$$

Mais on a

$$4\pi\mu = \operatorname{rot} H = 0,$$

le champ des aimants dérivant d'un potentiel.

Et l'on a aussi

$$\tau = 0,$$

parce que les composantes tangentielles de H sont continues. Il reste donc

$$\int [CH]\, d\varpi + F = 0.$$

Cette identité prouve que la force

$$F' = \int [CH]\, d\varpi$$

fait équilibre à l'action F exercée sur l'aimant : c'est donc l'action que l'aimant exerce sur le courant.

Nous verrons plus loin qu'il y a lieu de considérer une charge en mouvement comme équivalente à un courant et que le vecteur eU est équivalent au vecteur C.

Si l'on admet ce résultat, on aura, pour la part de la force d'origine magnétique agissant sur la charge $e\,d\varpi$ animée de la vitesse U, une expression de la forme

$$[eUH]\, d\varpi.$$

Si l'on entend ramener, au moyen d'une hypothèse moléculaire, le courant de conduction C au courant de convection, il conviendra de considérer cette expression

$$[eUH]\, d\varpi$$

---

que μ est une constante, les conclusions du texte subsistent. Dans la formule $B = \mu H$, la constante μ est la perméabilité magnétique et n'a point de rapport avec le μ du texte, qui signifie, à un facteur constant près, le rotationnel de H.

Digitized by Google

de la force subie par la charge $e\,d\varpi$ comme un résultat expérimental, conforme à la célèbre expérience de Rowland sur les charges en mouvement, et, ce que l'on devra demander aux hypothèses moléculaires, c'est de permettre de revenir de cette expression à celle qui convient au courant de conduction.

Il sera alors nécessaire d'admettre une certaine liaison entre la charge $e\,d\varpi$ et la matière qui lui sert de support.

Autrefois, on considérait la force magnétique qui s'exerçait sur un conducteur parcouru par un courant comme directement appliquée à la matière support du courant.

Aujourd'hui, le point de vue semble avoir changé et l'on admet que l'action est appliquée à la charge et ne se transmet à la matière que grâce à la mise en œuvre d'un mécanisme caché.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

DE LA THÉORIE DE MAXWELL A LA THÉORIE DE LORENTZ.

J'expose ci-après la théorie du déplacement électrique de Maxwell, la conception de Faraday d'après laquelle le courant est dû à un mouvement de charges électriques, la mesure de la quantité d'électricité par la décharge du condensateur, l'absence d'influence sur le résultat de l'inductance des fils qui relient la capacité au galvanomètre, la nécessité de concevoir les charges comme des quantités discrètes et non comme un milieu continu, la mesure des résistances d'isolement (R) par la décharge du condensateur (C), la constance du produit CR qui ne dépend que de la nature du milieu entre les armatures.

Il s'agit ensuite de vérifier le bien-fondé de l'hypothèse du courant de déplacement. Je donne le résultat schématique de l'exploration du champ variable créé par les moyens expérimentaux dus au génie de Hertz.

Je donne les équations du champ électromagnétique d'après Maxwell et je discute la conception de l'éther.

Je montre la nécessité de recourir aux théories moléculaires et de ne plus admettre qu'à titre de postulatum les équations relatives à l'éther.

J'indique les diverses manières de voir qu'on peut avoir au sujet de ce milieu, suivant qu'on le considère ou non comme polarisable, et je donne les diverses formes sous lesquelles on rencontre les équations générales du champ électromagnétique, suivant le choix des unités employées.

Je passe alors aux équations de Lorentz.

Je fais ensuite le calcul de l'énergie électrique et celui de l'énergie magnétique.

Digitized by Google

Je rappelle que les équations de Lorentz peuvent se déduire du principe d'Hamilton et qu'on peut en déduire, comme je l'ai indiqué dans mon Cours d'Électricité, la loi de l'induction et le théorème de Poynting, concernant le vecteur radiant.

Je termine par une discussion et une comparaison des diverses théories et des hypothèses impliquées dans les équations du champ électromagnétique d'après Lorentz.

THÉORIE DU DÉPLACEMENT ÉLECTRIQUE.

Les expériences de Coulomb avaient conduit à la théorie des deux fluides électriques ou magnétiques positifs et négatifs dont les masses agissaient les unes sur les autres suivant la loi de Newton ; Ampère avait étudié l'action des courants sur les courants et était parvenu à établir la loi qui porte son nom, entre deux éléments de courant. Les actions à distance semblaient donc s'introduire pour toujours dans l'étude de la gravitation universelle, de l'électricité, du magnétisme et de l'électrodynamique. Il répugnait cependant à l'esprit du physicien et mathématicien Maxwell d'admettre de pareilles actions comme des faits primordiaux, alors que les expériences de Faraday avaient prouvé l'influence du milieu interposé. Il fallait donc chercher une théorie dans laquelle les actions se propageassent de proche en proche. Il était donc nécessaire de concevoir un milieu entre les conducteurs électriques chargés, milieu qui pût réagir sur l'électricité. C'est ainsi que les fondateurs de l'Optique moderne avaient imaginé l'éther. Maxwell imagina donc un fluide dont les particules seraient susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique et qui tendrait à reprendre sa position d'équilibre sous l'influence d'une réaction élastique. Cette élasticité du milieu est nécessaire pour permettre l'explication de la décharge du condensateur quand on réunit ses armatures par un excitateur; elle est la cause du retour à l'état neutre.

Dans cette conception, l'état du milieu qui transmet les actions électriques est donc défini par deux vecteurs. Le premier, le vecteur E, est l'intensité du champ électrique; le second, le vecteur D, est le déplacement du fluide. Ainsi, à travers un élément de surface dS normal au vecteur unité ν, la quantité de fluide qui a traversé la surface est

$$(D_\nu)\, dS.$$

Digitized by Google

Le vecteur E est la cause du déplacement; dans un diélectrique en équilibre, le fluide élastique est soumis à une réaction $F = -E$. Quelle relation y a-t-il entre D et E? Par analogie avec les théories de la lumière, il convient de supposer, au moins à titre de première approximation ou de cas général, la proportionnalité de la cause à l'effet. Pour tenir compte de l'influence du pouvoir inducteur électrique du milieu matériel qui a sans doute quelque action sur le milieu élastique imaginé, Maxwell pose

$$D = \frac{k E}{4\pi} \tag{1}$$

et fait observer que dans un milieu cristallin ce seraient les composantes de D qui seraient des fonctions linéaires des composantes de E, de sorte que k serait le symbole d'une fonction vectorielle linéaire.

De l'équation (1) résultent d'importantes conséquences. Soit e la densité de l'électricité, de sorte que $e\,d\varpi$ soit la charge de l'élément de volume $d\varpi$, on tire de l'équation (1)

$$\operatorname{div} D = e, \tag{2}$$

et si le diélectrique n'est pas électrisé, on en déduit

$$\operatorname{div} D = 0, \tag{3}$$

ce qui montre que le vecteur D représente le déplacement d'un fluide incompressible. La condition (3) s'appelle aussi la *condition solénoïdale*, parce que le long d'un *tube* de flux le flux doit se conserver, étant donné qu'il ne se perd rien par la surface d'un tube ainsi défini, de sorte que le flux entrant par une base doit sortir par l'autre.

Cette condition fait entrevoir aussi comment se propageront les ondulations. Si l'on considère des tranches du fluide perpendiculaires à la direction de la propagation d'une onde, ces tranches ne pouvant se comprimer et étant bloquées dans le sens de la propagation par les tranches encore au repos ne seront susceptibles d'avoir que des mouvements transversaux en glissant les unes sur les autres. C'est une propriété du mouvement qui constitue la lumière et l'on pourrait admettre que le fluide élastique de Maxwell n'est autre que l'éther.

Si nous considérons une surface fermée, nous avons

$$\int (D_\nu)\, dS = \int \left(\frac{k E}{k\pi}_\nu\right) dS = Q,$$

Digitized by Google

Q étant la quantité d'électricité incluse. Donc la quantité d'électricité qui se trouve dans un volume donné est égale au flux total du vecteur D qui est sorti de la surface. Ainsi le fluide élastique et l'électricité se comportent comme deux fluides incompressibles dont l'un chasserait l'autre devant lui.

Mais Maxwell va plus loin, et il assimile son fluide élastique à de l'électricité, de telle sorte que pour lui les déplacements du fluide élastique supposé produiront les mêmes effets que les déplacements de l'électricité elle-même; or il assimile le courant de conduction à un déplacement d'électricité en train de s'effectuer et, comme le courant électrique a une action sur l'aiguille aimantée, il en conclura que le courant de déplacement $\frac{d\mathrm{D}}{dt}$ doit avoir les mêmes effets magnétiques que le courant C.

Dans cette hypothèse, le vecteur courant S en un point est donc la résultante du vecteur C et du vecteur $\frac{d\mathrm{D}}{dt}$. D'où

$$\mathrm{S} = \mathrm{C} + \frac{d\mathrm{D}}{dt}$$

(S initiale de *Strom*, *courant* pour Lorentz).

Revenons sur ces déductions pour les examiner en détail.

LOI DE FARADAY.

Considérons deux corps conducteurs A et B isolés dans le milieu diélectrique. Supposons A chargé de la quantité $+\mathrm{Q}$ et B chargé de la quantité $-\mathrm{Q}$. Réunissons A et B au moyen de l'excitateur, ou par un fil fin, nous n'en formons plus qu'un seul conducteur dont la surface n'est pas équipotentielle. Une redistribution de l'électricité va donc s'opérer; c'est le courant de décharge.

D'une part, nous observons la disparition des deux charges; d'autre part, nous observons un champ magnétique temporaire. A chaque instant, soit i la valeur du courant de décharge, le couple directeur qui agit sur l'équipage galvanométrique est proportionnel à i. Si j'ai affaire à un galvanomètre balistique, le courant a cessé avant que l'aiguille ne se soit mise à se déplacer sensiblement, mais une vitesse proportionnelle à l'impulsion $\int i\,dt$ lui a été donnée et c'est cette quantité que mesure l'élongation.

Digitized by Google

Remarquons immédiatement qu'il n'y a pas à craindre que cette intégrale soit modifiée du fait des réactions magnétiques du courant sur lui-même. En effet, nous avons obtenu l'équation

$$R\,i = -\frac{dB}{dt}$$

pour le courant d'induction i, on en déduit

$$R\int i\,dt = -(B_2 - B_1),$$

B_2 et B_1 étant les valeurs finale et initiale de B. Si donc on part d'un état dans lequel on a $B_1 = 0$ pour arriver à un autre état dans lequel on a également $B_2 = 0$, il reste

$$\int i\,dt = 0.$$

Cela suffit, pour faire comprendre que les phénomènes d'auto-inductance ne troublent pas la mesure de l'impulsion due à une décharge.

Supposons que nous chargions n fois par seconde au moyen d'une pile les deux conducteurs A et B et que nous les déchargions n fois par seconde à travers le galvanomètre. Alors, le galvanomètre prendra une déviation permanente fixe. Le nombre n ne doit pas être trop grand pour que les décharges soient complètes et il faut qu'il ne soit pas trop petit, pour que la déviation ne soit pas oscillante autour d'une certaine position, ce qui rendrait la mesure incertaine et d'une interprétation moins simple.

Le galvanomètre mesure, dans ces conditions, la quantité

$$\bar{i} = n\int_0^{\frac{1}{n}} i\,dt$$

qui est la valeur moyenne de i.

Or on constate que cette quantité est proportionnelle à nQ. Si t est la durée d'une décharge, on a $nt = 1$, puisqu'il y en a n par unité de temps et si l'on mesure i positivement quand il est dirigé de A vers B par le circuit de décharge, on a

$$\bar{i}\,t = -Q,$$

la charge ayant diminué de $-Q$ pour passer de la valeur Q à zéro.

Digitized by Google

Généralisant ce résultat, Faraday admet que l'on a réellement pour un courant continu I.

$$It = -Q.$$

Et il interprète ce résultat en remarquant que l'on obtiendrait de même la décharge du conducteur A sur le conducteur B, en imaginant un procédé de simple convection : il suffirait de toucher B avec le plan d'épreuve et de reporter sur A la charge du plan d'épreuve. On reporterait ainsi une partie de la charge de B sur A. On n'a qu'à répéter la même opération autant de fois qu'il sera nécessaire et l'on déchargera ainsi les deux corps. On peut donc imaginer que ce transport de charges s'effectue réellement au sein du conducteur métallique.

Cette hypothèse prête le flanc à plusieurs objections. En premier lieu, on admet qu'il y a des charges dans le conducteur parcouru par le courant, ce qui est contredit par l'expérience.

De

$$\mathbf{C} = c\mathbf{E}$$

on tire, en effet,

$$\operatorname{div}\mathbf{C} = c.\operatorname{div}\mathbf{E};$$

or on a

$$\operatorname{div}\mathbf{C} = 0.$$

Donc il vient

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0;$$

ou, en appelant k le pouvoir inducteur électrique du métal

$$\operatorname{div}\frac{k\mathbf{E}}{4\pi} = 0,$$

ou $e = 0$, e étant la densité de la quantité d'électricité. Cette objection était présentée par Vaschy.

En second lieu, il faudrait prouver que le déplacement d'une charge électrique produit pendant le mouvement une action sur l'aiguille aimantée, c'est-à-dire engendre un champ magnétique.

En troisième lieu, on se demande quelle peut être la nature des porteurs de l'électricité.

C'est la théorie corpusculaire de l'électricité qui répond à ces trois objections.

Première objection. — La réponse est que l'équation $e = 0$, telle qu'elle a été déduite de l'expérience, signifie seulement que dans un

Digitized by Google

élément de volume très petit pour nos sens grossiers, mais qui peut être très grand par rapport aux dimensions et aux distances moyennes des molécules, on a autant de charges positives que de charges négatives. Si l'on imagine les molécules comme des systèmes solaires, le corps central et les planètes peuvent chacun porter des charges et il peut y avoir des astres errants voyageant d'un monde à l'autre. Dans un volume qui contient un nombre extrêmement grand de ces mondes, la charge totale peut être nulle et cependant chacun des corps considérés peut posséder une charge individuelle.

Deuxième objection. — Cette objection se trouve levée par l'expérience de Rowland qui a montré l'action magnétique du courant de convection. Cette expérience doit être considérée comme fondamentale.

Troisième objection. — La nature des porteurs de l'électricité a été élucidée par la théorie de l'électrolyse, d'une part, et par celle des rayons cathodiques, d'autre part. L'étude des rayons cathodiques a donné naissance, en effet, à une théorie électronique de la conductibilité métallique, qui a relié entre eux de nombreux phénomènes.

En résumé, il n'est pas très aisé de justifier d'une façon directe les conceptions de Faraday, si l'on s'appuie seulement sur les faits expérimentaux qui étaient connus à son époque : il a devancé son temps. Il en est de même de Maxwell.

Son hypothèse se traduit ainsi :

Au lieu d'avoir

$$c\mathrm{E} = \frac{\mathrm{rot\,H}}{4\pi},$$

on écrira que l'on a

$$c\mathrm{E} + \frac{d\mathrm{D}}{dt} = \frac{\mathrm{rot\,H}}{4\pi},$$

ou, plus simplement,

$$4\pi.\mathrm{S} = \mathrm{rot\,H}.$$

On peut, d'ailleurs, immédiatement, déduire de la théorie du courant de déplacement la loi de la décharge du condensateur et obtenir ainsi une confirmation de la justesse des vues de Maxwell.

Considérons un condensateur en train de se décharger. Soit i le courant allant de l'armature A chargée positivement à l'armature B

Digitized by Google

chargée négativement. On a, en appelant C la capacité et R la résistance,

$$Q = C(V_A - B_B)$$

et

$$V_A - V_B = iR,$$

ainsi que nous l'avons vu.

Or, la loi de Faraday donne

$$dQ = -i\,dt$$

et des deux équations ci-dessus, on tire

$$Q = CRi.$$

On a donc

$$CR\,di = -i\,dt.$$

D'où

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{CR}},$$

i_0 étant de l'intensité initiale de décharge.

CR porte le nom de *constante de temps du circuit*.

Prenons i_0 pour unité d'intensité et CR pour unité de temps, tous les condensateurs se déchargeront conformément à la loi

$$i = e^{-t}.$$

Cette formule est vérifiée par l'expérience et c'est elle qui sert à mesurer la résistance d'isolement des câbles sous-marins.

D'une façon générale, en un point quelconque du diélectrique à travers lequel se déchargent les armatures, par défaut d'isolement, on aura

$$cE + \frac{dD}{dt} = 0,$$

car à chaque instant la distribution de l'électricité diffère infiniment peu de celle qui correspond à l'état d'équilibre. Et dans un état d'équilibre, il n'y a pas de champ magnétique. Nous avons donc ici très sensiblement $H = 0$ partout.

Comme l'on a

$$D = \frac{kE}{4\pi},$$

il vient

$$cE + \frac{k}{4\pi}\frac{dE}{dt} = 0 \qquad \text{ou} \qquad E = E_0 e^{-\frac{4\pi c}{k}t}.$$

Digitized by Google

Cette loi de décroissance, de disparition du champ doit être la même que celle de la charge ou du courant. En comparant les résultats, on a donc

$$\frac{4\pi c}{k} = \frac{1}{CR},$$

formule d'usage fréquent, mais le plus souvent on écrit ρ pour $\frac{1}{c}$, d'où

$$4\pi . CR = k\rho.$$

Grâce au courant de déplacement, tous les courants peuvent être considérés comme fermés et il n'y a plus de courants ouverts. C'est un des caractères les plus marqués de la théorie de Maxwell. Cette propriété résulte immédiatement de l'équation du champ électrodynamique

$$4\pi S = \text{rot}\, H.$$

Car, la divergence d'un rotationnel étant identiquement nulle, il en résulte

$$\text{div}\, S = 0.$$

Ce qui prouve que le vecteur S, le courant total, affecte une distribution solénoïdale.

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE L'HYPOTHÈSE DU COURANT DE DÉPLACEMENT.

1. *Conducteurs.* — L'étude des valeurs absolues des constantes dans un même système d'unités montre qu'il n'y a guère de possibilité de déceler dans les conducteurs métalliques le courant de déplacement pour peu que la constante diélectrique y soit d'un ordre de grandeur peu différent de celui de toutes les autres constantes diélectriques.

2. *Diélectriques.* — Pour que le courant diélectrique soit sensible, il faut que la vitesse de variation de D soit grande.

Ce n'est que dans ces dernières années qu'on est parvenu à obtenir facilement, au moyen des appareils de télégraphie militaire, des oscillations électriques entretenues, dont la fréquence corresponde à une longueur d'onde de 1^m, c'est-à-dire dont la fréquence soit comparable ou même supérieure à celle des oscillations hertziennes.

Digitized by Google

Hertz a dû recourir à un phénomène de brusque déclenchement, provoquant de rapides oscillations électriques.

Si l'eau est à un niveau différent dans deux vases communicants et qu'on vienne à ouvrir brusquement le robinet du tube de communication, l'eau va former un courant alternatif et les niveaux vont subir des oscillations.

De même, si deux conducteurs chargés d'électricités contraires se déchargent l'un sur l'autre par une étincelle disruptive, cette étincelle est oscillante.

La rapidité du déclenchement provient de ce qu'il se produit au même moment pour toutes les molécules d'air de l'intervalle explosif, à l'époque précise où le champ électrique atteint la valeur qui rompt pour chacune d'elles la cohésion diélectrique.

Aucun moyen mécanique de produire une rupture n'aurait une telle instantanéité.

Nous indiquerons plus tard le procédé employé pour avoir des oscillations entretenues.

En réfléchissant les ondes incidentes sur un miroir métallique, on peut produire des ondes stationnaires dans l'air, et faire en sorte que les vecteurs E et H soient perpendiculaires l'un à l'autre.

Considérons alors un résonateur, c'est-à-dire la petite boucle d'épreuve que nous avons déjà envisagée et plaçons-la dans une

Fig. 7.

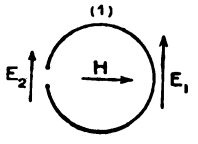
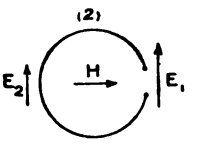


Fig. 8



position telle que le flux de force magnétique soit nul parce que, par exemple, le vecteur H sera dans son plan.

Admettons que le vecteur E, normal au vecteur H, soit dans le plan de la boucle et que sa grandeur varie d'un point à l'autre du champ à un instant donné. On peut donner à la boucle diverses orientations dans son plan. En particulier, la coupure peut être du côté de la faible force électrique E_2, tandis que l'extrémité du diamètre de la coupure est en un point de forte intensité électrique E_1. D'ailleurs E_1 et E_2 sont des fonctions périodiques du

Digitized by Google

temps et de grande fréquence. Ce sera la position (1). En tournant la boucle sur elle-même de 180° dans son plan, on aurait la position (2).

Autour de E_1, d'après l'équation

$$4\pi \frac{dD}{dt} = \text{rot}\, H,$$

il y aura circulation d'un champ magnétique, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int (H\, ds)$$

ne sera pas nulle, pour un circuit fermé embrassant le fil de la boucle. Auprès de E_2, il y aura de même une circulation de la force magnétique H; mais à cause de la coupure, il n'y aura pas de flux coupé par le conducteur. L'effet de E_1 est donc prépondérant. Alors le flux magnétique variable engendrera une force électromotrice d'induction qui se traduira par une étincelle à la coupure. Dans la position (2), la force électromotrice locale due à E_1 est inexistante à la coupure et l'action de E_2 de l'autre côté est moins grande que ne l'était l'action de E_1, l'étincelle n'existera donc pas ou sera bien plus faible. En somme, la variation du flux magnétique embrassé engendrera une vibration le long du résonateur qui peut être considéré comme une ligne télégraphique isolée aux deux bouts ou comme une corde tendue entre deux points fixes.

Dans la position (1), la force électrique E_1 provoque une variation de flux qui sollicite cette corde tendue en son milieu et qui, par suite, la fait aisément vibrer.

Dans la position (2), la force électrique E_1 produisant la variation de flux dans le voisinage d'un point fixe est beaucoup moins bien située pour provoquer un mouvement vibratoire et le résonateur ne se trouve guère soumis qu'à l'action de la force E_2 que nous supposons beaucoup plus faible. Dans cette deuxième position, le résonateur ne vibrera donc qu'avec une faible intensité.

Cette explication suppose qu'il y a une grande analogie entre la vibration d'une corde tendue et celle d'un fil télégraphique de faible longueur.

C'est, en effet, ce que justifie l'étude de la propagation du courant le long des fils conducteurs.

Digitized by Google

En somme, l'examen que nous avons fait de la loi de l'induction au moyen d'une boucle d'épreuve et celui que nous venons de faire de l'action exercée sur le résonateur à coupure, du fait du courant de déplacement, résument la théorie des expériences célèbres de Hertz.

Cette méthode exige qu'on opère dans un champ qui ne soit pas uniforme, puisque E_1 et E_2 sont différents d'intensité efficace.

Mais on peut opérer dans des champs uniformes.

On sait produire des ondulations électriques, dans des conditions de symétrie telles que le vecteur E et le vecteur H soient rectangulaires.

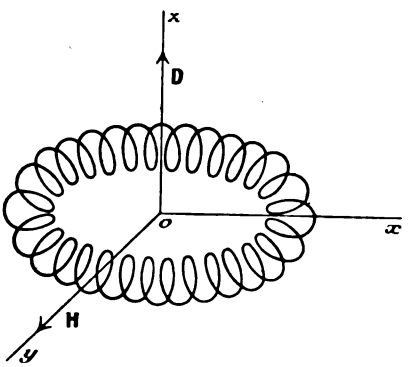
Plaçons-nous dans ce cas.

Comme intrument d'épreuve, construisons un solénoïde de forme toroïdale. Un anneau Gramme en donne l'image. Ménageons une coupe pour y observer une étincelle ou pour y introduire un détenteur quelconque approprié.

Les diverses spires sont des circonférences méridiennes, les centres de ces circonférences sont sur un cercle (C). Transportons le solénoïde dans le champ, de façon que l'axe du tore perpendiculaire au cercle (C) soit dans la direction du champ électrique.

Il est clair que le flux du champ magnétique à travers la courbe (C) est nul. D'autre part, le flux à travers deux spires situées à l'extré-

Fig. 9.



mité d'un même diamètre engendre des forces électromotrices d'induction égales et de signes contraires. En résumé, l'action du champ magnétique est complètement éliminée.

Digitized by Google

En intégrant le long de (C), on a

$$\int (\mathrm{H}\, ds) = 4\pi \frac{d}{dt} \int \mathrm{D}\, d\mathrm{S},$$

et comme la surface est perpendiculaire à D, la circulation de H le long de (C) n'est pas nulle.

Il y a donc, par suite de la variation de D, un flux magnétique alternatif dans le solénoïde. Il en résulte une force électromotrice d'induction qu'on peut observer à la coupure.

Comme D est proportionnelle au pouvoir inducteur électrique, l'action sera augmentée si l'on introduit dans l'axe du tore un noyau ayant une forte constante diélectrique, un vase cylindrique rempli d'eau, par exemple.

Mais, en réalité, les équations du champ électrodynamique ont été vérifiées d'une façon beaucoup plus certaine par l'accord de leurs conséquences avec la pratique de la radiotélégraphie et par l'explication qui en a été tirée, des principaux phénomènes de l'optique.

Nous admettrons donc, à titre de postulatum, les deux équations vectorielles, du champ électrodynamique, dans l'air ou plutôt dans le vide :

$$4\pi \frac{d\mathrm{D}}{dt} = \mathrm{rot}\, \mathrm{H},$$

$$\mathrm{rot}\, \mathrm{E} = -\frac{d\mathrm{H}}{dt}.$$

D'après la façon dont nous les avons établies, ces équations sont des résultats d'expérience.

Seulement, quelle peut être la signification de pareilles équations, si E et H ne représentent pas une modification de quelque substance?

Nous sommes amenés ainsi à les regarder comme définissant réellement les propriétés du milieu qui transmet les ondulations lumineuses, puisque celles-ci se ramènent, en définitive, aux ondulations électromagnétiques de très haute fréquence, ainsi que le démontrent les relations entre les constantes optiques et les constantes électriques.

Seulement, il se trouve que les équations du champ électrodynamique ont mené au principe de relativité et que, d'après celui-ci, tout nous échappe de ce qui concerne l'éther.

Digitized by Google

Il vaut donc mieux, dès lors, se passer de la conception de ce milieu insaisissable.

Mais alors, nos équations ne représentent plus que l'image mathématique d'un mécanisme caché entièrement soustrait à nos regards.

Et dans ces conditions, les équations du champ électrodynamique revêtent l'aspect de véritables postulata.

C'est à cette combinaison que Lorentz paraît être arrivé.

Reprenons donc les équations de Maxwell, mais en en limitant l'emploi au milieu luminifère.

Arrêtons-nous un instant sur ce point.

Dans l'air, ou pour mieux dire dans l'éther, nous avons

$$\text{rot}\,\mathrm{E} = -\frac{d\mathrm{H}}{dt}. \tag{1}$$

C'est une loi simple, élémentaire, relative au milieu le plus simple de tous, puisqu'il est dénué de toutes les complications de la constitution des corps en particules, molécules et atomes.

Je tiens cette loi pour acquise.

D'autre part, dans un milieu magnétique, j'ai

$$\int (\mathrm{E}\,ds) = -\frac{d}{dt}\int \mathrm{B}_\nu\,d\mathrm{S}. \tag{2}$$

L'expérience donne bien ce résultat, qui est confirmé par la pratique de l'électrotechnique, chaque jour, et partout.

Mais quand il s'agit de passer de l'équation (2) à l'équation (3), mathématiquement équivalente,

$$\text{rot}\,\mathrm{E} = -\frac{d\mathrm{B}}{dt}, \tag{3}$$

on fait l'hypothèse que B conserve une signification précise en chaque point mathématique. Or, si les corps sont constitués par des atomes et des molécules, le point mathématique pourra se trouver soit dans l'éther, et c'est l'équation (1) qui sera valable, soit dans l'intérieur d'une molécule. Mais les expériences que nous avons faites se rapportent à des valeurs moyennes en un point donné. Les vecteurs considérés étaient tous continus. La continuité du milieu éther permet de conserver l'équation (1); mais l'équation (3) n'est plus valable pour un observateur ayant les sens subtils et capable de discerner individuellement les atomes et les molécules.

Digitized by Google

Il n'est donc pas possible de conserver l'équation (3) comme base d'une théorie; on pourra demander seulement aux théories moléculaires de ne pas être en contradiction avec l'équation (2), puisque celle-ci représente un résultat expérimental.

Dans ces conditions, c'est l'équation (1) seule qui doit être admise sans réserve.

Et d'ailleurs, n'avons-nous pas vu que, pour passer de l'équation (3) à la force électromotrice d'induction, il nous a fallu faire une hypothèse sur la constitution des aimants et admettre les courants particulaires d'Ampère.

Passons maintenant à l'autre équation fondamentale du champ électromagnétique.

Dans l'éther, on a

$$\text{rot}\,\mathrm{H} = 4\pi\frac{d\mathrm{D}}{dt} \tag{4}$$

et nous trouvons justement dans le second membre un terme qui représente le courant de déplacement de Maxwell, c'est-à-dire le courant d'un fluide élastique hypothétique.

Il est vrai qu'en chaque point le vecteur

$$\mathrm{D} = \frac{k_0\,\mathrm{E}}{4\pi}, \tag{5}$$

où k_0 représente le pouvoir inducteur électrique du vide, peut parfaitement être mesuré, qu'il en est de même de H, et que, par suite, l'équation elle-même, ne contenant que des grandeurs directement accessibles à l'expérience, ne laisse plus substituer aucune trace de l'échafaudage métaphysique qui a servi à la construire et que, si elle manque de base expérimentale directe, c'est par suite de l'insuffisance des moyens expérimentaux, et non pas par suite de quelque vice intrinsèque. Rien n'empêche donc de considérer l'équation (4) comme vraie pour l'éther.

L'autre équation

$$\int(\mathrm{H}\,ds) = \int 4\pi\left(\frac{d\mathrm{D}}{dt} + c\,\mathrm{E},_{\nu}\right)d\mathrm{S} \tag{6}$$

peut être soumise à la même critique que l'équation (3), parce que la constante c est une propriété de la matière, qui n'appartient peut-être pas à chaque point situé dans l'intérieur du volume occupé par la

Digitized by Google

matière, mais qui n'est qu'une valeur moyenne, aux yeux de ce démon dont parle Maxwell et qui est taillé à l'échelle des grandeurs moléculaires.

Tout ce qu'on pourra faire, c'est de demander aux théories moléculaires d'être d'accord avec l'équation (6), qui est vérifiée expérimentalement.

L'emploi courant des galvanomètres vérifie l'équation (6) comme l'emploi courant des générateurs d'induction vérifie l'équation (4).

Cependant, une remarque est à faire, en ce qui concerne les conducteurs métalliques, si l'on suppose que la constante k y est du même ordre de grandeur que pour les corps diélectriques, le courant de conduction l'emporte toujours en importance sur le courant de déplacement, représenté par $\frac{d\mathrm{D}}{dt}$ et qui dépend ainsi implicitement de k.

Encore une remarque.

Quand on a un milieu magnétique, on écrit

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{E} = -\frac{d\mathrm{B}}{dt}.$$

Si le milieu est polarisable, on a une polarisation induite I,

$$\mathrm{I} = \varkappa \mathrm{H},$$

et si l'on pose

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa,$$

il en résulte

$$\mathrm{B} = \mu \mathrm{H},$$

μ étant un nombre; c'est la perméabilité magnétique.

Si nous supposons que l'éther lui-même est polarisable, et que nous appelions μ_0 la perméabilité, nous aurons

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{E} = -\mu_0 \frac{d\mathrm{H}}{dt}.$$

A priori, cette façon de voir ne saurait être repoussée. En effet, de même que la constante μ suppose qu'on a affaire à un milieu magnétiquement polarisable, la constante k suppose que l'on a affaire à un milieu diélectrique, électriquement polarisable. Les deux théories des milieux magnétiques polarisables et des diélectriques sont en effet la transposition l'une de l'autre. Si donc, pour le vide, nous

Digitized by Google

écrivons

$$\operatorname{rot} \mathrm{H} = k_0 \frac{d\mathrm{E}}{dt},$$

nous devons, pour plus de généralité, écrire, pour le vide également,

$$\operatorname{rot} \mathrm{E} = -\mu_0 \frac{d\mathrm{H}}{dt}.$$

Dans le système électromagnétique, on fait, par hypothèse, $\mu_0 = 1$. Ce système est donc basé sur l'hypothèse simplificatrice que l'éther n'est pas magnétiquement polarisable.

Revenons au cas d'un milieu quelconque, dont les constantes sont k_1 et μ_1. Les équations du champ électromagnétique sont susceptibles d'y prendre des formes assez diverses suivant le choix particulier des unités. Je vais examiner un cas que l'on rencontre fréquemment dans la pratique, surtout dans les Traités d'Optique.

Partons donc des équations

$$(11) \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathrm{E} = -\mu_1 \dfrac{d\mathrm{H}}{dt}, \\ \operatorname{rot} \mathrm{H} = \quad k_1 \dfrac{d\mathrm{E}}{dt}. \end{cases}$$

Faisons un changement d'unités ou, si l'on veut, un changement de variables et, en appelant μ_0 et k_0 les constantes qui se rapportent au vide (ou à l'éther), posons

$$\mathrm{E}\sqrt{k_0} = \mathrm{E}_1, \qquad \mathrm{H}\sqrt{\mu_0} = \mathrm{H}_1,$$

il vient

$$\operatorname{rot} \mathrm{E}_1 = -\frac{\mu_1}{\mu_0}\sqrt{\mu_0 k_0}\,\frac{d\mathrm{H}_1}{dt},$$

$$\operatorname{rot} \mathrm{H}_1 = +\frac{k_1}{k_0}\sqrt{\mu_0 k_0}\,\frac{d\mathrm{E}_1}{dt}.$$

Je pose

$$\sqrt{\mu_0 k_0} = \frac{1}{c},$$

nous verrons que cette constante c est la vitesse de la lumière.

Rapportons, d'autre part, les constantes électriques et magnétiques à celles de l'air ou du vide ou de l'éther (c'est tout un) prises pour unité, en écrivant

$$(12) \qquad \frac{k_1}{k_0} = \varepsilon, \qquad \frac{\mu_1}{\mu_0} = \mu,$$

Digitized by Google

puis, comme aucune confusion n'est plus à craindre, remplaçons E_1 et H_1 par E et H, et il reste

$$(13)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} E = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{dH}{dt}, \\ \operatorname{rot} H = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{dE}{dt}. \end{cases}$$

Comme on a $E_1 = E$ quand on fait $k_0 = 1$, ce qui caractérise le système d'unités électrostatiques, E_1 est exprimé en unités électrostatiques.

Comme on a $H_1 = H$ quand on fait $\mu_0 = 1$, ce qui caractérise le système d'unités électromagnétiques, H_1 est exprimé en unités électromagnétiques.

Passons maintenant à une autre forme, celle qu'on obtient en exprimant E et H en unités électromagnétiques. On aura donc tout d'abord

$$\mu_0 = 1.$$

En second lieu, comme le déplacement D fait image, introduisons-le à la place de E et il vient

$$(14)\qquad \begin{cases} 4\pi c^2 \operatorname{rot} D = -\dfrac{dH}{dt}, \\ \operatorname{rot} H = 4\pi \dfrac{dD}{dt}. \end{cases}$$

C'est une forme qu'on rencontre fréquemment, notamment dans Lorentz.

Il faut ajouter aux équations (14) les deux équations de liaison :

$$\operatorname{div} D = e, \qquad \operatorname{div} H = 0.$$

S'il n'y a pas de charge au point considéré, on fera e égal à zéro.

Il peut paraître étonnant que nous proposions d'appliquer les équations générales du champ électrodynamique dans l'éther à un point où la densité de la charge électrique serait égale à e.

Mais, pour prendre une analogie, nous admettrons bien que les équations de l'hydrodynamique s'appliquent à l'intérieur d'un tourbillon, bien que les tubes de tourbillon conservent leur individualité.

Il en est de même pour la charge électrique. La densité e représente simplement la divergence du vecteur D; elle est indestructible

Digitized by Google

comme le tourbillon hydrodynamique; mais son existence n'implique pas forcément la présence d'un autre milieu que l'éther.

D'ailleurs, si nous imaginions que toute matière n'est autre qu'une déformation particulière de l'éther, il serait tout naturel de supposer que l'équation

$$\operatorname{div} \mathrm{D} = e$$

tient toujours, même au sein de l'atome constitutif de la matière.

Que si la matière est quelque chose de distinct de l'éther, nous ferons tout de même l'hypothèse que cette équation de liaison subsiste encore et caractérise la charge portée par l'élément matériel.

En somme, à titre de postulatum, nous admettrons les équations suivantes dans un milieu au repos :

$$\operatorname{rot} \mathrm{H} = 4\pi \frac{d\mathrm{D}}{dt}, \tag{1}$$

$$-4\pi c^2 \operatorname{rot} \mathrm{D} = \frac{d\mathrm{H}}{dt}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathrm{D} = e, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} \mathrm{H} = 0. \tag{4}$$

Quelles modifications convient-il d'apporter à ce système dans le cas où la charge électrique au lieu d'être en repos se trouve animée d'une vitesse U ?

Nous ferons appel à l'expérience de Rowland : *Une charge électrique en mouvement est équivalente à un courant.*

Cela est vrai pour le courant de convection produit par la rotation de disques chargés.

C'est vrai aussi pour les charges transportées par les rayons cathodiques et par les rayons de Goldstein. L'action du champ magnétique sur ces corpuscules a été démontrée expérimentalement.

On doit donc considérer comme acquis que la présence du vecteur $e\mathrm{U}$ en un point agit sur l'aiguille aimantée à la façon dont agirait le vecteur C. Et par suite l'équation (1) doit être remplacée par l'équation (1 *bis*) ci-après :

$$\operatorname{rot} \mathrm{H} = 4\pi \left(\frac{d\mathrm{D}}{dt} + e\mathrm{U} \right). \tag{1 bis}$$

Le vecteur C disparaît, il dépend des hypothèses moléculaires; ce sont elles qui permettront de le réintroduire comme l'aspect moyen des vecteurs $e\mathrm{U}$ relatifs aux charges moléculaires.

Digitized by Google

Remarquons enfin que la divergence du vecteur H doit continuer à être nulle, puisqu'il est impossible d'isoler un pôle magnétique.

Les équations fondamentales du champ électromagnétique sont alors :

1° L'équation de définition du courant total S, savoir :

$$S = \frac{dD}{dt} + eU, \tag{5}$$

lequel courant total produit un champ H, satisfaisant à la condition

$$\operatorname{rot} H = 4\pi S. \tag{1 bis}$$

On a d'autre part, entre le déplacement et le champ magnétique, l'équation de réaction

$$-4\pi c^2 \operatorname{rot} D = \frac{dH}{dt}, \tag{2}$$

les vecteurs D et H étant assujettis aux équations de liaison

$$\operatorname{div} H = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} D = e. \tag{4}$$

Ce qui fait l'autorité de ce groupe d'équations, c'est son parfait accord avec le principe de la conservation de l'énergie.

Mais cette application n'est pas exempte de quelques hypothèses, que je résume brièvement :

1° L'énergie électrique et l'énergie magnétique seront supposées localisées dans l'éther;

2° L'énergie électrique est assimilée à de l'énergie potentielle;

3° L'énergie magnétique est assimilée à de l'énergie cinétique. En effet, nous adoptons le point de vue d'Ampère que le magnétisme est dû à des courants particulaires et nous ajoutons que ces courants particulaires sont dus à des déplacements de charges électriques. De cette manière, le magnétisme devient un phénomène électrique et il n'y a plus lieu de s'étonner de leur état de dépendance mutuelle.

CALCUL DE L'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE.

1° Le vecteur D dépend uniquement du mouvement des charges e. Le flux de D à travers une surface dont chaque point est animé

Digitized by Google

d'une vitesse U′ a pour variation instantanée

$$\frac{d\mathrm{D}}{dt} = \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t} + \mathrm{U}'\,\mathrm{div}\,\mathrm{D} + \mathrm{rot}[\mathrm{D}\mathrm{U}'].$$

Mais comme D ne dépend pas du temps directement, mais seulement du fait du déplacement des charges, on a

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t} = 0.$$

D'autre part, si je prends le flux à travers une surface fermée, l'intégrale relative au rotationnel disparaît.

Il reste donc

$$\frac{d}{dt}\int (\mathrm{D}\nu)\,d\mathrm{S} = \int (\mathrm{U}'e, \nu)\,d\mathrm{S},$$

ou, pour un volume infiniment petit,

$$\frac{de}{dt} = \mathrm{div}\,\mathrm{U}'e.$$

Mais la formule relative à une surface variable dont chaque élément est animé de la vitesse U′ doit s'appliquer à une surface fixe, si la charge en chaque point de la surface est animée d'une vitesse

$$\mathrm{U} = -\mathrm{U}'.$$

On a donc

$$\frac{de}{dt} = -\,\mathrm{div}\,e\mathrm{U}.$$

2° Soit W l'énergie électrique. J'ai

$$\frac{d\mathrm{W}}{dt} = -\int (\mathrm{E}e\mathrm{U})\,d\varpi;$$

le volume d'intégration s'étend à l'infini; on peut le considérer comme limité par une surface sur laquelle tous les vecteurs électriques sont nuls.

Au cours des changements de distribution des masses, effectués avec une lenteur infinie, il y a toujours un potentiel V et l'on a

$$\mathrm{E} = -\nabla \mathrm{V},$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{W}}{dt} = \int (\nabla \mathrm{V}e\mathrm{U})\,d\varpi,$$

Digitized by Google

ou, par la formule d'Ostrogradski,

$$\frac{dW}{dt} = -\int (V \nabla e U)\, d\varpi.$$

Mais V est une quantité scalaire; les deux vecteurs sont le vecteur symbolique ∇ et le vecteur U, on a donc

$$\frac{dW}{dt} = \int V \frac{de}{dt} d\varpi.$$

L'élément de charge de $d\varpi$ est élevé au potentiel V dans le temps dt.

Remplaçons e par son expression en fonction de déplacement; il vient

$$\frac{dW}{dt} = \int V \frac{d}{dt} (\nabla D)\, d\varpi.$$

Appliquons encore la formule d'Ostrogradski, nous aurons

$$\frac{dW}{dt} = -\int \left(\frac{dD}{dt} \nabla V\right) d\varpi = \int \left(\frac{dD}{dt} E\right) d\varpi.$$

Interprétons cette équation dans la théorie du déplacement; elle devient évidente, car $(E\, dD)$ est le travail élémentaire du champ E pour le déplacement dD, par unité de volume.

Posons dans le vide

$$D = \frac{k_0 E}{4\pi},$$

il vient

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{k_0 (E^2)}{4\pi} d\varpi,$$

puisque la constante d'intégration est nulle, W s'annulant avec E.

Remplaçons E par son expression en fonction de D et prenons le système d'unités électromagnétiques, on aura

$$k_0 = \frac{1}{c^2}$$

et

$$W = 2\pi c^2 \int (D^2)\, d\varpi.$$

La densité de l'énergie électrostatique est

$$\frac{1}{8\pi} k (E^2)$$

dans un milieu de pouvoir inducteur électrique k.

Digitized by Google

Si l'on appelle $\frac{k}{k_0} = \varepsilon$ la constante électrique, on aura dans le système électromagnétique

$$k = \varepsilon k_0 = \frac{\varepsilon}{c^2}$$

et la densité de l'énergie électrostatique aura pour expression

$$\frac{\varepsilon}{8\pi c^2}(E^2).$$

CALCUL DE L'ÉNERGIE MAGNÉTIQUE DANS LE CHAMP PRODUIT PAR LES COURANTS.

1° Soit C le vecteur courant en un point quelconque. Considérons une surface dont chaque point soit animé de la vitesse U'.

Pour le calcul de la variation du flux à travers cette surface, on sait que l'on peut poser

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + U' \operatorname{div} C + \operatorname{rot}[CU'].$$

Mais si nous supposons que le courant ne dépende pas directement du temps et que ses variations soient dues uniquement aux variations que l'on fait subir aux tubes de flux eux-mêmes, en les déplaçant dans le champ, on a

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

D'autre part, un courant a toujours une distribution solénoïdale. Dans toute surface fermée, le flux qui entre est égal au flux qui sort et la divergence est nulle par conséquent en tout point. On a donc

$$\operatorname{div} C = 0,$$

il reste donc

$$\frac{dC}{dt} = [\nabla[CU']].$$

Mais, en chaque point de la surface, tout se passe comme si, la surface étant immobile, c'était le vecteur C qui fût animé de la vitesse de translation $U = -U'$.

Donc, pour la variation du flux, à travers une surface fixe, les tubes de flux étant animés en chaque point de la vitesse U, on a

$$\frac{dC}{dt} = [\nabla[UC]].$$

Digitized by Google

2° Cherchons maintenant l'énergie magnétique, en la considérant comme de l'énergie électrocinétique.

Si nous avons un système mécanique, dont l'énergie potentielle soit W et dont l'énergie cinétique soit T, nous aurons, pour la conservation de l'énergie,

$$dW + dT = 0.$$

Si, sans modifier l'énergie cinétique, nous laissons agir les forces intérieures, nous aurons pour la conservation de l'énergie, en appelant $d\mathfrak{E}$ le travail élémentaire des forces internes,

$$d\mathfrak{E} + dW = 0,$$

d'où

$$d\mathfrak{E} = dT.$$

Donc, pour avoir l'énergie cinétique T du champ électromagnétique, il nous suffira d'évaluer le travail des formes électrodynamiques internes, en supposant que par un moyen quelconque nous parvenions à maintenir constants les courants. Ce qui sera variable, ce sera leur position. Ou pour mieux dire, les courants étant distribués par filets ou solénoïdes, nous supposerons que le flux du vecteur C est maintenu invariable dans chaque solénoïde et que c'est le solénoïde que nous déplaçons et déformons à volonté.

C'est dans ces conditions qu'en évaluant $d\mathfrak{E}$ nous obtiendrons dT. Et si l'énergie s'annule avec les courants nous aurons $T = \mathfrak{E}$.

Avant d'entrer dans le détail du calcul, faisons remarquer que nous pourrions avoir à plusieurs reprises à considérer, dans l'application de la formule d'Ostrogradski, une surface enveloppe du champ. Nous supposerons toujours cette surface reculée au delà du champ. Elle n'interviendra donc pas dans le calcul, de sorte que A et B étant deux vecteurs quelconques, nous aurons, d'une façon générale,

$$\int (A\nabla B)\, d\varpi = \int (B\nabla A)\, d\varpi.$$

Cela posé, le travail élémentaire des forces intérieures est

$$d\mathfrak{E} = dt \int (HUC)\, d\varpi,$$

et par des transformations successives faciles à suivre, nous avons

$$d\mathfrak{E} = dt \int (\nabla A UC)\, d\varpi = dt \int (\nabla [UC] A)\, d\varpi = dt \int ([\nabla [UC]] A)\, d\varpi$$

Digitized by Google

ou

$$d\mathfrak{E} = dt \int \left(\frac{d\mathrm{C}}{dt} \mathrm{A} \right) d\varpi.$$

A représente comme nous l'avons vu l'impulsion, et C est assimilé à une vitesse; le produit auquel nous sommes arrivés est donc de la forme

$$dv \times mv.$$

C'est bien l'accroissement de la force vive $\frac{1}{2} m v^2$.

Poursuivant les transformations, on a

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \int \left(\mathrm{A} \nabla \frac{1}{4\pi} \frac{d\mathrm{H}}{dt} \right) d\varpi = \int \left(\frac{d\mathrm{H}}{dt} \nabla \mathrm{A} \right) \frac{d\varpi}{4\pi} = \int \left(\frac{d\mathrm{H}}{dt} \mathrm{B} \right) \frac{d\varpi}{4\pi}.$$

Cette dernière expression nous fournit une interprétation de la surface $\int (\mathrm{B}\, d\mathrm{H})$ de la boucle d'hystérésis décrite par le point figuratif (B, H) en coordonnées rectangulaires.

Dans un milieu magnétique polarisable, nous avons

$$\mathrm{B} = \mu \mathrm{H}$$

et il vient

$$d\mathfrak{E} = d \int \frac{\mu}{8\pi} (\mathrm{H}^2)\, d\varpi,$$

de sorte que la densité de l'énergie magnétique a pour expression

$$\frac{\mu (\mathrm{H}^2)}{8\pi}.$$

Dans le vide il faut faire $\mu = \mu_0$, et dans le système électromagnétique il faudra, en outre, faire $\mu_0 = 1$.

Il nous aurait fallu changer le signe du travail des forces électrodynamiques, si, au lieu de supposer les intensités invariables, nous avions supposé qu'on les fît varier de façon que le flux d'induction embrassé par chaque tube fût maintenu constant. Nous aurions eu affaire alors à un déplacement de feuillets magnétiques, et un système semblable est un système conservatif dans lequel la variation d'énergie est égale et de signe contraire au travail des forces internes.

Observation. — Comme dans une boucle d'hystérésis, on a

$$\int \mathrm{B}\, d\mathrm{H} < 0,$$

Digitized by Google

il y a perte d'énergie magnétique; l'énergie perdue se retrouve sous forme de chaleur.

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.

L'application du principe des forces vives est alors la suivante :
On se donne :

1° L'énergie électrique ou potentielle

$$W_e = 2\pi c^2 \int D^2 \, d\varpi;$$

2° L'énergie magnétique ou cinétique

$$W_m = \int \frac{H^2 \, d\varpi}{8\pi};$$

3° L'équation de liaison

$$\operatorname{div} D = e;$$

et l'on cherche à rendre égale à zéro la variation de l'intégrale

$$\int_0^t (W_m - W_e) \, dt,$$

en tenant compte de la liaison.

En chaque point, la densité de charge e a une vitesse U.

La variation à calculer peut dépendre des variations virtuelles qu'on donne au déplacement D de l'éther, sans qu'on fasse varier la densité électrique. On a alors une variation qui ne dépend que des variables qui définissent l'état de l'éther.

Si l'on se donne les équations

$$\operatorname{div} H = 0,$$
$$\operatorname{rot} H = 4\pi S = 4\pi \left(e U + \frac{dD}{dt} \right),$$

on en déduit

$$4\pi c^2 D = - \frac{d\Lambda}{dt} + \operatorname{grad} \psi,$$

ψ étant le potentiel d'une matière attirante de densité $c^2 e$.

On obtient ainsi la valeur de la force électromotrice d'induction, ce qui est équivalent à l'équation (2) du champ électrodynamique.

Je ne reproduis pas ici la démonstration.

Digitized by Google

Le second point, c'est le calcul de la force mécanique qui agit sur la masse e animée de la vitesse U.

Il convient de se rendre compte de la nature des variations. Elles sont dues aux déplacements virtuels de la substance qui supporte les masses électriques.

En un point, D varie parce qu'il est fonction des vitesses U′ des diverses densités aux différents points du champ et parce qu'on donne à ces charges des déplacements virtuels.

La variation virtuelle de e dans un élément de volume $d\varpi$ dépend des déplacements virtuels de la charge en ce point. Pour connaître cette variation dans un élément $d\varpi$ qui reste fixe dans l'espace, il faut remarquer que le déplacement y amène ce qu'on trouve en se plaçant à l'époque initiale à l'extrémité d'un vecteur égal et de signe contraire au déplacement virtuel.

La variation réelle de e pendant le temps dt ne dépend que de la vitesse des charges U; il faut compter ce qui entre et ce qui sort de la surface de l'élément $d\varpi$ eu égard à cette cause.

Un calcul un peu long, que je ne reproduirai pas, quoique la notation vectorielle permette une certaine concision, conduit au résultat suivant pour la force mécanique (densité de force par unité de volume $= \mathcal{E}$)

$$\mathcal{E} = 4\pi c^2 \, \mathrm{D}e + [\mathrm{UH}]\, e.$$

La première partie est la force de l'électrostatique; la seconde partie est la force de l'expérience de Rowland.

Il est facile maintenant de se livrer aux hypothèses moléculaires et l'on trouve aisément :

1° La loi de l'induction pour les conducteurs parcourus par des courants;

2° Le flux d'énergie dont la densité

$$c^2 [\mathrm{DH}]$$

est le vecteur radiant de Poynting.

Je ne reproduirai pas ces calculs.

REMARQUES PARTICULIÈRES.

1. *Anciennes théories des deux fluides.* — On peut reprocher à ces fluides d'être purement hypothétiques, de n'être qu'une fiction

Digitized by Google

sans réalité, d'avoir des propriétés par trop mathématiques, d'avoir en partage une continuité absolue qui ne se concilie pas avec les théories moléculaires, de donner à l'électricité positive et à l'électricité négative des propriétés rigoureusement symétriques, alors que bien des expériences, comme par exemple l'aspect d'une flamme entre les plateaux d'un condensateur plan, révèlent des différences, de ne pas tenir compte du milieu, d'agir à distance d'une façon instantanée.

2. *Actions à distance.* — Les actions à distance en raison inverse du carré de la distance se présentent, dans la théorie de Vaschy, comme des équivalences mathématiques. Ce qui agit ainsi, ce sont les masses fictives, non les charges ou les courants; c'est le fluide nducteur, non l'électricité elle-même; ce sont les masses polaires d'un aimant, non le magnétisme vrai qui n'existe pas à l'état de pôle isolé.

3. *Définition des champs.* — C'est à Vaschy qu'on doit le procédé de raisonnement qui permet de tirer nettement de l'expérience la définition précise : d'une part, des charges; d'autre part, du champ. Cette définition existait bien dans l'esprit des physiciens, mais c'est lui qui a donné une forme régulière à la discussion des faits de façon à faire ressortir ce qui est indépendant du corps d'épreuve et ce qui est indépendant du champ.

4. *Unité de la force électrique.* — On a toujours admis que la force électrique agissant sur une charge unité était un phénomène identique à lui-même, soit que la force fût observée dans un champ conservatif, comme le champ électrostatique de conducteurs isolés, soit que la force fût observée entre deux conducteurs, électrisés parce qu'ils étaient en relation avec deux points d'un courant électrique à des potentiels différents, bien que, dans ce dernier cas, il y eût des transformations d'énergie; en général, en effet, le courant provenait de l'énergie chimique d'une pile et dissipait de l'énergie calorifique.

5. *Unité de la force magnétique.* — On a eu plus de peine à admettre l'identité du champ produit par les courants avec celui des aimants. L'un n'est pas conservatif, l'autre l'est; dans l'un des

Digitized by Google

cas, le potentiel n'est pas uniforme; dans l'autre, il est uniforme. Ces différences frappaient l'esprit. Mais la dissemblance entre le champ magnétique des aimants ou des courants, quand on l'observe en un point, est une dissemblance dans les causes productrices, non dans la modification du milieu au point considéré. La tension d'un ressort est toujours la tension d'un ressort, quelle que soit la nature de la force à laquelle cette tension peut être due. Mais pour arriver à cette conception de l'unité de la force magnétique, il faut se représenter l'intensité du champ comme caractérisant une propriété bien définie de l'espace dans la région envisagée et faire abstraction de ce qui se passe au loin. Qu'on enferme le solénoïde avec sa pile dans une boîte close, ou bien qu'on y mette un aimant équivalent, l'exploration du champ ne révèle au dehors aucune différence, tant qu'on se borne à la simple action sur la petite aiguille d'épreuve.

6. *Localisation de l'énergie.* — Si le champ électrique ou magnétique en un point consiste seulement en une modification locale, il faut bien admettre qu'une partie du travail accompli pour créer ce champ électrique ou magnétique se trouve localisée aux divers points du champ. Mais comment?

C'est pour répondre à cette question que Maxwell imagine le déplacement électrique.

7. *Déplacement électrique.* — Dans les milieux magnétiques, dans les aimants, l'état était défini, au point de vue du magnétisme, par deux vecteurs bien distincts : l'intensité du champ, d'une part; l'induction magnétique, d'autre part. La théorie du magnétisme a ainsi précédé la théorie de l'électricité. La symétrie entre les deux théories se trouve rétablie par Maxwell; l'état du milieu se trouve défini par deux vecteurs : l'un est le *vecteur cause*, c'est l'intensité de champ électrique; l'autre est le *vecteur effet*, c'est le déplacement, et par là Maxwell entend le déplacement d'une substance élastique, dont il assimile les molécules à celles d'un fluide électrique.

Là où le déplacement électrique se trouve avoir un élément de divergence, il y a une charge électrique, positive ou négative, suivant le signe de la divergence elle-même. Faraday voyait dans les molécules des centres de force, Maxwell voit dans les charges électriques des centres de convergence ou de divergence.

Digitized by Google

L'énergie électrique par unité de volume sera donc le produit de la force par la projection du déplacement; la nature de cette charge est, dans cette conception, de l'énergie potentielle; cela est manifeste.

Quand le système est au repos, le déplacement donne le déplacement des charges, puisque le fluide de Maxwell chasse devant lui les charges, comme un liquide incompressible en chasse devant lui un autre avec lequel il ne se mélangerait pas.

Qu'arrivera-t-il si le système n'est pas au repos?

Ce qui agit sur l'aiguille aimantée, c'est le courant électrique; mais la charge du condensateur provoque, dans le diélectrique, un courant du fluide de Maxwell. Maxwell lui attribue alors la propriété d'agir, lui aussi, sur l'aiguille aimantée, parce qu'il le considère comme un mouvement d'électricité comparable au mouvement des charges qui circulent, selon les idées de Faraday, à l'intérieur du conducteur.

L'origine de ce courant de déplacement n'est pas soustraite à toute objection. L'action de ce courant sur l'aiguille aimantée n'était qu'une hypothèse. Seulement, cette hypothèse permettait d'étendre à l'Optique le domaine de l'Électricité. Et plus tard, les expériences de Hertz, équivalant, en somme, à l'exploration d'un champ très rapidement variable, en démontraient la réalité.

8. *Conservation de l'énergie.* — Depuis que Helmholtz et sir William Thomson ont montré que le principe de la conservation de l'énergie s'applique aux phénomènes de l'électricité et du magnétisme et permet de retrouver la loi de l'induction, on s'est demandé si inversement, en se donnant la loi de l'induction considérée comme un résultat expérimental, on ne pourrait pas retrouver la loi de l'action électrodynamique et prouver ainsi qu'il faut faire entrer en ligne de compte, non seulement le courant de conduction, mais encore le courant de déplacement.

Il est vrai que le calcul justifie cette façon de voir. Mais je me suis abstenu de faire appel aux principes généraux comme moyen de démonstration, pour les raisons suivantes :

9. *Règle de la composition des forces.* — La règle de composition des forces peut bien être démontrée quand on suppose qu'un certain nombre de cordons tirent sur un corps et que leurs tensions consti-

Digitized by Google

tuent les seules forces agissantes; mais si, quand on croit que seules elles sont en train d'agir, on trouve que la règle de composition des forces n'est pas satisfaite, on n'en conclut pas que cette règle est en défaut et qu'il y a là une exception, on en conclut bien plutôt l'existence d'une nouvelle force, invisible celle-là, et qui, selon le cas, pourra être une force centrifuge, ou la pesanteur, ou une action électrique, etc. Dès lors, la règle de la composition des forces n'est plus démontrable : c'est elle qui sert à définir les forces. Le rôle du physycien est de régler les expériences pour bien classer celles-ci par catégories.

De même, la loi de la conservation de l'énergie est, par définition, toujours satisfaite, puisque c'est un principe; mais il y a, *a priori*, les plus grandes incertitudes sur la nature des énergies qu'il faut faire intervenir et mettre en balance. Je ne considère donc pas l'application du principe de la conservation de l'énergie comme ayant force probante.

10. *Rôle du milieu.* — Et d'ailleurs, où l'énergie est-elle localisée? Est-ce dans la matière, est-ce dans l'éther?

Quand il s'agit de l'électrotechnique industrielle des distributions d'énergie électrique, les seules équations qui interviennent sont

$$\operatorname{rot} \mathrm{E} = -\frac{d\mathrm{B}}{dt},$$
$$\operatorname{rot} \mathrm{H} = 4\pi \mathrm{C}.$$

Le courant de déplacement n'intervient pas. Les valeurs des grandeurs qui entrent ici en jeu sont des valeurs moyennes, perceptibles par le physicien, au moyen des instruments grossiers dont il dispose, petite sphère d'épreuve, petite aiguille d'épreuve. Il y a une différence d'échelle immense entre ces équations et les équations

$$\operatorname{rot} \mathrm{E} = -\mu_0 \frac{d\mathrm{H}}{dt},$$
$$\operatorname{rot} \mathrm{H} = 4\pi \left(e\,\mathrm{U} + \frac{d\mathrm{D}}{dt} \right) \qquad \left(\mathrm{D} = \frac{k_0 \mathrm{E}}{4\pi} \right),$$

qui s'appliquent au milieu qui propage les actions électromagnétiques à travers le vide.

La localisation de l'énergie amène alors à considérer l'énergie

Digitized by Google

comme pouvant résider en des régions complètement dénuées de matière. On a alors de l'énergie dans l'éther; mais l'éther lui-même se présente comme une substance sans propriété, puisqu'il résulte du principe de relativité que nous ne savons rien de notre déplacement par rapport à l'éther. Alors l'énergie aurait donc son siège dans le néant, puisque l'éther disparaît comme une hypothèse inutile, du moment qu'il doit échapper à toute mesure.

Il n'y a pas d'autre ressource que de renverser la question; si l'éther n'existe pas, l'énergie demeure la seule réalité. Et au lieu de supposer que l'énergie siège dans la matière ou dans une substance, il faut dire que ce qui constitue une substance ou une matière, c'est l'énergie qui s'y trouve.

11. *L'électromagnétisme et la mécanique.* — Au lieu de déduire les lois de l'électromagnétisme des lois de la mécanique, nous sommes donc tentés de chercher le secret de la mécanique dans les lois de l'électromagnétisme. Quoi qu'il en soit, il y a entre les deux domaines un contact intime et c'est la gloire de Maxwell de l'avoir montré.

Maxwell imagine que les phénomènes électromagnétiques sont les manifestations de quelque mécanisme caché et il suppose que ce mécanisme a pour énergie potentielle l'énergie électrique et pour énergie cinétique l'énergie magnétique, il considère les courants comme les vitesses des variables généralisées et il applique les équations de Lagrange relatives aux systèmes à liaison. Il retrouve ainsi les lois de l'induction.

C'est, au fond, le même raisonnement que l'on applique lorsque, partant de l'expression supposée connue du rotationnel de la force électrique dans le vide, on en déduit la force électromotrice d'induction, par l'application du principe d'Hamilton, en supposant connues les expressions des énergies potentielle et cinétique, assimilées respectivement à l'énergie électrique et à l'énergie magnétique.

Mais il faut avouer que les expressions mêmes de ces énergies ont été établies dans des cas bien différents, et que c'est une hypothèse bien hardie que cette localisation de l'énergie quand on l'applique au vide lui-même.

Je préfère considérer la réussite du calcul comme une vérification pure et simple, qui est le couronnement de l'œuvre et lui donne un sens philosophique, plutôt que comme un procédé régulier de

Digitized by Google

démonstration. Nous ne connaissons que des forces et des champs de force; l'énergie en elle-même nous échappe, dès qu'il n'y a plus de modification patente d'une matière tombant sous les sens.

12. *Équations du champ électrodynamique.* — Les équations du champ électrodynamique ne sont démontrées que par les phénomènes qui se produisent dans le petit circuit d'épreuve. Mais la démonstration est d'autant plus exacte que le circuit d'épreuve exerce une réaction moins grande. Et par suite, les équations doivent subsister même lorsqu'il disparaît, car c'est justement alors qu'on atteint la perfection.

D'autre part, les équations pour les milieux ordinaires sont vérifiées par l'expérience; les variables sont des valeurs moyennes. Les équations n'ont de sens que pour un milieu continu ou qui peut paraître continu à nos sens grossiers. C'est donc surtout pour l'éther qu'on peut considérer les équations comme vérifiées, puisqu'alors aucune discontinuité, comme celles dues à la présence de molécules, ne vient troubler le phénomène ou le compliquer.

Digitized by Google

CHAPITRE V.

FONCTIONS HARMONIQUES SIMPLES.

FONCTIONS HARMONIQUES SIMPLES; LEUR REPRÉSENTATION.

L'analyse des fonctions périodiques montre qu'on peut les décomposer en harmoniques. Dès lors, l'étude des fonctions sinusoïdales s'impose.

C'est le théorème de Fourier qui montre qu'une fonction qui n'a qu'un nombre fini de maxima et de minima dans un intervalle donné T peut ainsi y être décomposée en une série de fonctions sinusoïdales dont les périodes sont la période T et ses sous-multiples. La fonction peut même avoir des discontinuités et, dans ce cas, la série obtenue représente au point de discontinuité la moyenne des valeurs de la fonction des deux côtés de ce point.

Je renverrai aux *Traités d'analyse* pour cette démonstration; cependant, je montre dans le Chapitre consacré aux méthodes d'Heaviside comment des considérations purement physiques amènent au développement de Fourier; le lecteur pourra donc s'y reporter.

J'aborde donc immédiatement les propriétés élémentaires des fonctions périodiques simples, et je montre leur relation avec les imaginaires. Ces quantités sont d'ailleurs représentables sous la forme vectorielle et l'on sait que la pratique des courants alternatifs introduit constamment des diagrammes dont les diverses lignes représentent les valeurs efficaces des grandeurs physiques périodiques.

J'examine ensuite la fraction rationnelle du premier degré pour faire voir que si la variable indépendante décrit un cercle, il en est de même de la fonction. Ce théorème a d'innombrables applications.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HARMONIQUES SIMPLES.

1° Soit t la variable indépendante; considérons la fonction y

$$y = \mathrm{A} \sin\left(2\pi \frac{t}{\mathrm{T}} + \varphi\right);$$

Digitized by Google

c'est une fonction sinusoïdale. On appelle A l'*amplitude*, T est la *période*, φ la *phase*.

Soit

$$y' = A' \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi'\right),$$

une autre fonction harmonique simple de même période T. Je dis qu'on a pour la somme $y + y'$ une fonction harmonique simple y''. L'amplitude A'' et la phase φ'' de y'' se détermineront par les équations

$$A'' \cos\varphi'' = A \cos\varphi + A' \cos\varphi',$$
$$A'' \sin\varphi'' = A \sin\varphi + A' \sin\varphi'.$$

Considérons deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy. Soit OM un vecteur faisant avec Ox l'angle φ et d'amplitude A; soient, de même, OM' le vecteur d'amplitude A' faisant avec Ox l'angle φ', et OM'' le vecteur d'amplitude A'' faisant avec Ox l'angle φ''. Les équations précédentes expriment que le vecteur OM'' est la résultante ou somme géométrique des vecteurs OM et OM'. L'étude des fonctions harmoniques simples a donc les plus grandes analogies avec l'étude des vecteurs coplanaires. Cette étude peut se faire par les moyens du calcul vectoriel; mais, le plus souvent, on se contente de la représentation géométrique des imaginaires. Les deux procédés ne se ramènent pas l'un à l'autre parce que, dans le calcul des imaginaires, on a

$$zz' = z'z,$$

tandis que, dans le calcul vectoriel, on a

$$[AB] = -[BA].$$

La propriété commutative n'existe pas pour les produits vectoriels. Le défaut de symétrie que présente le calcul des imaginaires est la raison pour laquelle, dans les questions où interviennent les travaux et les moments, il vaut mieux recourir au calcul vectoriel.

2° Soit $f(x)$ une fonction entière de x. Si nous divisons par $f(x)$ une fonction entière de x, nous aurons

$$F(x) = f(x)Q + R,$$

Digitized by Google

R étant un polynome entier en x de degré inférieur d'une unité à celui de $f(x)$.

Si nous faisons abstraction des termes qui contiennent $f(x)$ en facteur, nous pourrons, en élargissant le sens du signe $=$, écrire simplement

$$F(x) = R,$$

ce qui signifiera simplement que $F(x)$ et R ont même reste dans la division par $f(x)$. Dans ces conditions, si l'on a

$$F(x) = R, \qquad F'(x) = R', \qquad F''(x) = R'',$$

on aura

$$F(x) + F'(x) + F''(x) = R + R' + R'',$$
$$F(x)\,F'(x)\,F''(x) = RR'R''.$$

Ici RR'R'' peut ne pas être le reste de la division de FF'F'' par f, mais le reste de la division de RR'R'' par f est le même que celui de la division de FF'F'' par f.

En particulier, soit

$$f(x) = x^2 + 1.$$

On pourra écrire

$$F(x) = F_1(x^2) + x\,F_2(x^2),$$

en séparant les termes de degré pair et les termes de degré impair. Comme pour avoir le reste de la division de $\Phi(x)$ par $x - \xi$, il suffit d'écrire $\Phi(\xi)$, le reste de la division de $F(x)$ par $x^2 + 1$ sera

$$R = F_1(-1) + x\,F_2(-1).$$

Pour éviter toute confusion, quand le signe d'égalité doit être pris avec le sens que nous lui avons attribué, on donne à la variable une dénomination caractéristique; le plus souvent, à la place de x, on écrit i, quelquefois on écrit j; parfois enfin, pour rappeler que dans les restes on remplace x^2 par -1, on écrit $\sqrt{-1}$.

3° Le reste correspondant au diviseur $i^2 + 1$ est du premier degré en i.

Soit z une fonction de i entière, on aura donc

$$z = x + iy,$$

et, dès lors, rien n'empêche de représenter z par un point du plan de XY, ayant x pour abscisse et y pour ordonnée.

Digitized by Google

Si l'on a

$$z' = x' + iy',$$

on aura

$$z + z' = x + x' + i\ (y + y'),$$

de sorte que l'addition revient à la composition des vecteurs.

4° Le point M représentatif de z s'appelle son *affixe;* la distance OM est son *module;* l'angle dont il faut faire tourner OX (dans le sens qui, par une rotation de 90°, amène OX sur OY) pour faire coïncider OX avec OM, s'appelle l'*argument; x* et *iy* sont respectivement la partie réelle et la partie purement imaginaire de la variable z, à laquelle on donne alors le nom de *quantité algébrique imaginaire.*

Si ρ est le module, φ l'argument, on a

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi.$$

Si je pose

$$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$z' = \rho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

j'aurai pour le produit

$$zz' = \rho\rho'[\cos\varphi\cos\varphi' + i(\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\cos\varphi') + i^2\sin\varphi\sin\varphi'].$$

Remplaçant i^2 par -1 et tenant compte des formules d'addition du sinus et du cosinus, j'obtiens

$$zz' = \rho\rho'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')].$$

On en déduirait facilement qu'on a

$$z^m = \rho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).$$

C'est la FORMULE DE MOIVRE.

Mais on a

$$z^m = \rho^m(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m,$$

d'où, par comparaison,

$$\cos m\varphi = (\cos\varphi)^m - C_m^2(\cos\varphi)^{m-2}\sin^2\varphi + C_m^4(\cos\varphi)^{m-4}(\sin\varphi)^4 - \dots,$$
$$\sin m\varphi = C_m^1\sin\varphi(\cos\varphi)^{m-1} - C_m^3(\sin\varphi)^3(\cos\varphi)^{m-3} + \dots.$$

5° De là, je vais déduire les développements en série de $\cos\psi$ et $\sin\psi$, en posant

$$m\varphi = \psi$$

Digitized by Google

et faisant tendre simultanément m vers l'infini et φ vers zéro, de manière que ψ conserve une valeur constante.

A cet effet, je compare les deux séries

$$f(\psi) = 1 - \frac{1}{1.2}\psi^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\psi^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\psi^6 + \dots,$$

$$\cos m\psi = (\cos\varphi)^m - C_m^2(\cos\varphi)^{m-2}(\sin\varphi)^2 + C_m^4(\cos\varphi)^{m-4}(\sin\varphi)^4 - \dots.$$

Or, des considérations élémentaires montrent qu'on a pour un angle φ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

$$1 - \frac{\varphi^2}{6} < \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 1,$$

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} < \cos\varphi < 1,$$

$$m^n \frac{\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)^{n-1}}{n!} < C_m^n < \frac{m^n}{n!},$$

d'où, pour $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$,

$$\left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right)^n \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)^{m-n} \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)^{n-1} < \frac{C_m^n(\cos\varphi)^{m-n}(\sin\varphi)^n}{\frac{(m\varphi)^n}{n!}} < 1.$$

Comme on a

$$m\varphi = \psi,$$

on voit que chaque terme de la série $\cos m\varphi$ tend, par valeurs inférieures en valeur absolue, vers le terme correspondant de la série que j'ai appelée $f(\psi)$. Cette série en ψ a une valeur finie et déterminée. Si cette série est convergente, à plus forte raison est convergente la série en φ. Je puis choisir n assez grand pour que les restes des séries soient infiniment petits, puis je puis, tout en laissant à n cette valeur, choisir m assez grand pour que la somme des m premiers termes de la série en φ diffère infiniment peu de la somme des m premiers termes correspondants de la série en ψ. On voit donc que la série en ψ représente bien $\cos m\varphi$, c'est-à-dire $\cos\psi$.

Démonstration analogue pour $\sin m\varphi$. On a alors

$$\sin\psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{4!}, \qquad \dots,$$

d'où

$$\cos\psi + i\sin\psi = 1 - \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^4}{4!} - \dots + \left(\psi - \frac{\psi^3}{3!} + \dots\right) i$$

Digitized by Google

ou

$$\cos\psi + i\sin\psi = 1 + \psi i + \frac{(\psi i)^2}{2!} + \frac{(\psi i)^3}{3!} + \ldots = e^{\psi i},$$

d'après le développement connu de e^x. La formule

$$e^{i\psi} = \cos\psi + i\sin\psi$$

est la formule d'Euler. Cette marche est celle d'Euler.

6° Soit donc z une quantité imaginaire dont ρ est le module et ψ l'argument. J'aurai

$$z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad \text{ou} \qquad z = \rho e^{i\psi}.$$

Soit

$$\psi = \frac{2\pi t}{T} + \varphi, \qquad \rho = \text{const.};$$

l'affixe M de z décrira, quand le temps t variera, un cercle de rayon ρ autour de l'origine, à raison d'un tour dans la période T, c'est-à-dire avec la vitesse angulaire $\frac{2\pi}{T}$. On désigne cette vitesse angulaire, le plus souvent, par ω, et l'on donne à ω le nom de *pulsation*. La vitesse du point M est un vecteur MV, perpendiculaire à OM dans le sens du mouvement et de module $\omega\rho$; on aura donc

$$\frac{dz}{dt} = \omega\rho\, e^{\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)i}.$$

Comme on a

$$z = x + yi = \rho\,[\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi)],$$

on aura

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$

et l'on en déduira

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \omega\rho\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \\
\frac{dy}{dt} &= \omega\rho\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \ldots, \\
\frac{d^n x}{dt^n} &= \omega^n\rho\cos\left(\omega t + \varphi + n\frac{\pi}{2}\right), \\
\frac{d^n y}{dt^n} &= \omega^n\rho\sin\left(\omega t + \varphi + n\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Digitized by Google

7° *Quantités conjuguées.* — Les quantités z et z_0

$$z = x + yi = \rho e^{i\varphi},$$
$$z_0 = x - yi = \rho e^{-i\varphi}$$

sont dites *conjuguées*. Leurs affixes sont symétriques par rapport à Ox.

L'équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

est celle d'un cercle de centre (α, β) et dont le rayon R est donné par

$$\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = \gamma.$$

Si l'on pose

$$z = x + yi, \qquad a = \alpha + \beta i,$$
$$z_0 = x - yi, \qquad a_0 = \alpha - \beta i,$$

on aura

$$x^2 + y^2 = zz_0, \qquad x = \frac{z + z_0}{2}, \qquad yi = \frac{z - z_0}{2},$$
$$\alpha = \frac{a + a_0}{2}, \qquad \beta i = \frac{a - a_0}{2},$$

et l'équation du cercle deviendra

$$zz_0 - (a + a_0)\left(\frac{z + z_0}{2}\right) + (a - a_0)\left(\frac{z - z_0}{2}\right) + \gamma = 0$$

ou

$$(M) \qquad zz_0 - a_0 z - a z_0 + \gamma = 0.$$

Inversement, toute équation de ce genre est telle que l'affixe M de z décrit un cercle; α, β et R sont faciles à déterminer.

Si un point N est l'affixe d'une quantité u et que les quantités imaginaires u et z soient reliées par une relation homographique à coefficients réels ou imaginaires, si M, affixe de z, décrit un cercle, le point N en décrit un autre.

On aura, par exemple,

$$z = \frac{m + nu}{m' + n'u},$$

d'où, en désignant par l'indice zéro les quantités conjuguées,

$$z_0 = \frac{m_0 + n_0 u_0}{m'_0 + n'_0 u_0}.$$

On obtient donc, en reportant les valeurs de z et z_0 dans l'équation

Digitized by Google

du cercle (M),

$$(m+nu)(m_0+n_0u_0) - a_0(m+nu)(m'_0+n'_0u_0)$$
$$- a(m_0+n_0u_0)(m'+n'u) + \gamma(m'_0+n'_0u_0)(m'+n'u) = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$A\,u\,u_0 + B\,u + C\,u_0 + D = 0$$

en posant

$$A = n\,n_0 - a_0\,n\,n'_0 - a\,n_0\,n' + \gamma\,n'_0\,n',$$
$$B = n\,m_0 - a_0\,n\,m'_0 - a\,m_0\,n' + \gamma\,m'_0\,n',$$
$$C = m\,n_0 - a_0\,m\,n'_0 - a\,n_0\,m' + \gamma\,n'_0\,m',$$
$$D = m\,m_0 - a_0\,m\,m'_0 - a\,m_0\,m' + \gamma\,m'_0\,m'.$$

On voit que A et D sont réels et que B et C sont conjugués.

La relation obtenue est donc de la forme voulue pour que (N) décrive un cercle.

Ce théorème a d'innombrables applications dans la théorie des courants alternatifs industriels.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

COURANTS PÉRIODIQUES ET OSCILLATIONS AMORTIES.

Ce Chapitre a pour objet l'étude des courants périodiques et des courants périodiques amortis.

Tout d'abord, je définis la valeur de l'intensité efficace, celles de la puissance active et de la puissance réactive, d'un courant alternatif.

Je définis ensuite ce qu'on appelle une *intensité périodique simple amortie*, puis la *phase*, la *pseudo-période*, le *coefficient d'amortissement*, le *décrément logarithmique*.

J'étudie les maxima et les minima, l'enveloppe des courbes correspondant aux diverses phases, les points d'inflexion.

Je forme l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfont les fonctions périodiques amorties.

J'aborde la représentation vectorielle des fonctions périodiques amorties, ainsi que celle de leur vitesse et de leurs accélérations des divers ordres.

J'expose une méthode simple qui permet de résoudre géométriquement l'équation des mouvements amortis, en se donnant les valeurs initiales de la variable et de sa vitesse.

Je donne ensuite la valeur de l'intégrale dont dépend la chaleur dégagée dans un conducteur donné par un courant sinusoïdal amorti.

1° *Valeur efficace.* — Considérons le courant i

$$i = \mathrm{A} \sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \varphi\right).$$

On appelle *valeur efficace* du courant i la quantité i_{eff} donnée par l'expression

$$i_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} i^2 \, dt.$$

Digitized by Google

Considérons simultanément le courant

$$j = \mathrm{A}\cos\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \varphi\right).$$

On aura, évidemment, puisque l'intégrale s'étend sur une période,

$$j_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} j^2\,dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} i^2\,dt = i_{\text{eff}}^2.$$

Or, on a

$$i^2 + j^2 = \mathrm{A}^2,$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} (i^2 + j^2)\,dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{A}^2\,dt = \mathrm{A}^2.$$

Donc

$$i_{\text{eff}}^2 = j_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}(i_{\text{eff}}^2 + j_{\text{eff}}^2) = \frac{1}{2}\mathrm{A}^2.$$

On pourra donc écrire

$$i = \sqrt{2}\, i_{\text{eff}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \varphi\right).$$

2° *Puissance.* — Soit

$$i = \sqrt{2}\, i_{\text{eff}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \varphi\right)$$

un courant fourni sous la force électromotrice

$$e = \sqrt{2}\, e_{\text{eff}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \psi\right).$$

La puissance moyenne P_m, c'est-à-dire le travail moyen effectué par seconde par cette force électromotrice sera

$$\mathrm{P}_m = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} ei\,dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\, i_{\text{eff}}\, e_{\text{eff}} \int_0^{\mathrm{T}} 2\sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \varphi\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \psi\right) dt.$$

Mais on peut appliquer la formule connue

$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a - b = \varphi - \psi, \\ a + b = \dfrac{4\pi t}{\mathrm{T}} + \varphi + \psi. \end{cases}$$

Comme l'intégrale qui dépend de t a une valeur moyenne nulle, il restera

$$\mathrm{P}_m = i_{\text{eff}}\, e_{\text{eff}} \cos(\varphi - \psi).$$

Digitized by Google

C'est la puissance wattée. On donne le nom de *puissance réactive* à l'expression

$$P_r = i_{\text{eff}} e_{\text{eff}} \sin(\varphi - \psi).$$

Calculons la valeur moyenne de $-e\frac{di}{dt}$, on a

$$-\frac{1}{T}\int_0^T e\frac{di}{dt}\,dt = -\frac{1}{T} e_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \frac{2\pi}{T}\int_0^T 2\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\psi\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)dt,$$

ou, par une transformation analogue à la précédente,

$$-\frac{1}{T}\int_0^T e\frac{di}{dt}\,dt = -\frac{2\pi}{T} e_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \sin(\psi-\varphi) = \frac{2\pi}{T} P_r.$$

3° *Fonctions périodiques amorties.* — Je dirai que i est une fonction sinusoïdale amortie du temps t, si l'on a

$$i = A e^{-\beta t}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right) \qquad (\beta > 0).$$

Dans cette expression, T est la pseudo-période, φ la phase, β le coefficient d'amortissement. βT est le décrément logarithmique. Voici la raison d'être de cette dénomination :

Changeons t en $t+T$, i prendra la valeur i' et l'on aura

$$\frac{i'}{i} = e^{-\beta T},$$

d'où

$$\beta T = \log\frac{i}{i'}.$$

Ici i et i' sont deux valeurs successives de i, correspondant à deux époques quelconques séparées par la durée d'une période.

Le plus souvent, on préférera comparer deux maxima successifs. Formons la dérivée de i; on a

$$\frac{di}{dt} = A e^{-\beta t}\left[-\beta\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)+\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)\right].$$

Donc, cette dérivée s'annulera et i sera maximum ou minimum pour les valeurs de t, telles que l'on ait

$$\text{tang}\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right) = \frac{2\pi}{\beta T}. \tag{1}$$

Digitized by Google

Je pose

$$\beta = -r\cos\theta, \qquad \frac{2\pi}{T} = r\sin\theta.$$

Comme, dans la pratique, β est une petite quantité positive et que $\frac{2\pi}{T}$ est positif, on pourra prendre pour θ un angle compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π; et l'on aura

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{2\pi}{\beta T}, \qquad r = \sqrt{\beta^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}}.$$

L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\operatorname{tang}\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) = \operatorname{tang}(\pi - \theta)$$

et l'on aura, pour le $k^{\text{ième}}$ maximum ou minimum,

$$\frac{2\pi t_k}{T} + \varphi = \pi - \theta + k\pi \qquad (k \text{ entier}).$$

Pour distinguer les maxima et les minima, prenons la dérivée seconde; on a

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = A e^{-\beta t}\left[\left(\beta^2 - \frac{4\pi^2}{T^2}\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) - \frac{4\pi\beta}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)\right].$$

Si t annule $\frac{di}{dt}$, il restera, en remplaçant $\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ par sa valeur tirée de (1) en fonction du sinus

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -A e^{-\beta t}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)\left(\beta^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}\right) = -r^2 i.$$

Donc, le signe de la dérivée seconde est opposé à celui de i. Et par suite, i sera maximum aux élongations positives et minimum aux élongations négatives.

Comme i change de signe entre un maximum et un minimum, il passe par zéro dans l'intervalle, puisqu'il reste fini; de même il y aura un point d'inflexion entre un maximum et un minimum.

Si i_M et i'_M sont deux *élongations* successives de même sens, l'intervalle de temps qui les sépare est égal à T; on aura donc

$$\beta T = \log\frac{i_M}{i'_M}.$$

Digitized by Google

Pour mesurer le décrément logarithmique, on peut donc prendre le logarithme du rapport de deux maxima ou deux minima successifs, faciles à observer, en général.

Si t_1, t_2, t_3, ... sont les racines de la dérivée rangées par ordre de grandeur croissante à partir de zéro, la première racine t_k que l'on rencontrera en faisant varier t à partir de zéro sera obtenue pour la valeur de k satisfaisant aux inégalités suivantes

$$\frac{\varphi+\theta}{\pi}-1<k<\frac{\varphi+\theta}{\pi} \qquad (k \text{ entier}),$$

et elle correspondra à un maximum si, pour $t=0$, la fonction i est croissante, c'est-à-dire si $\frac{di}{dt}$ est positive.

Or, pour $t=0$, on a

$$\frac{di}{dt}=A\left(-\beta\sin\varphi+\frac{2\pi}{T}\cos\varphi\right),$$

d'où la condition

$$Ar\sin(\varphi+\theta)>0.$$

C'est-à-dire, puisque l'angle φ est compris, si l'on veut, entre zéro et 2π, si $\varphi+\theta$ est compris entre zéro et π ou 2π et 3π, lorsque A est positif.

La courbe (i, t), qui donne l'ordonnée i en fonction de l'abscisse t, dépend du paramètre φ. On obtiendra l'enveloppe en éliminant φ entre l'équation de la courbe

$$i=Ae^{-\beta t}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$$

et l'équation obtenue en dérivant, par rapport à φ,

$$0=Ae^{-\beta t}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right).$$

On a alors

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)=\pm 1$$

et la courbe enveloppe est

$$i=\pm Ae^{-\beta t}.$$

Les points de contact t' de la courbe (φ) avec l'enveloppe sont donnés par l'équation

$$\frac{2\pi t'_k}{T}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad (k \text{ entier}).$$

Digitized by Google

Donc les zéros, les maximum ou minimum, les points d'inflexion, les points de contacts avec les courbes enveloppes sont, chacun respectivement, équidistants, l'équidistance étant d'une demi-période. Et la distance entre un zéro, un maximum ou minimum, un point d'inflexion ou un point de contact de même rang, dépend de T et de β, mais non de A ni de φ.

4° *Équation différentielle.* — L'élimination de $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$ entre $\frac{di}{dt}$ et $\frac{d^2i}{dt^2}$ ne laisse subsister que le terme en sinus, qui s'exprime en fonction de i, et l'on obtient ainsi

$$\frac{d^2i}{dt^2}+2\beta\frac{di}{dt}+\left(\beta^2+\frac{4\pi^2}{T^2}\right)i=0. \tag{1}$$

L'expression

$$i=Ae^{-\beta t}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$$

satisfait à cette équation différentielle (1) pour les valeurs initiales

$$i=i_0=A\sin\varphi,$$
$$\frac{di}{dt}=i'_0=A\left(-\beta\sin\varphi+\frac{2\pi}{T}\cos\varphi\right).$$

Développons l'expression de i et remplaçons $A\sin\varphi$ et $A\cos\varphi$ par leurs valeurs en fonction des données initiales, il vient

$$i=e^{-\beta t}\left(i_0\cos\frac{2\pi t}{T}+\frac{i'_0+\beta i_0}{\frac{2\pi}{T}}\sin\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Ce sera la solution générale de l'équation (1).

5° *Représentation géométrique.* — On peut, conjointement avec la fonction

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)e^{-\beta t}\qquad\left(\omega=\frac{2\pi}{T}\right),$$

envisager la fonction

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)e^{-\beta t}.$$

Je pose

$$z=x+y\sqrt{-1}$$

et j'appelle M l'*affixe* de z; lorsque t varie, M décrit une spirale dans le plan des xy.

Digitized by Google

Je pose

$$Z = e^{\varphi\sqrt{-1}} \times A$$

et j'ai

$$z = Z e^{(-\beta+\omega\sqrt{-1})t}.$$

Je conserve, pour r et θ, les mêmes désignations que plus haut et je prends la vitesse de M, c'est-à-dire $\frac{dz}{dt}$; j'ai

$$\frac{dz}{dt} = Z(-\beta+\omega\sqrt{-1})\, e^{(-\beta+\omega\sqrt{-1})t} = r e^{\theta\sqrt{-1}} z.$$

Donc le vecteur vitesse MV a pour module

$$r \text{ gr. OM}$$

et pour direction celle qui fait avec OM un angle égal à θ dans le sens positif. Comme θ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π et est une constante, on voit que la courbe décrite par le point M coupe tous les rayons OM sous un angle constant en se rapprochant indéfiniment du pôle O. La forme de cette courbe ne dépend que de β et de ω.

En projetant sur Ox le vecteur $\overrightarrow{MV}$, on aura $\frac{dx}{dt}$; il suffit évidemment de multiplier A par r et d'augmenter l'angle de θ, d'où

$$\frac{dx}{dt} = A r\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \theta),$$

$$\frac{dy}{dt} = A r\, e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi + \theta),$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} = A r^n e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + n\theta),$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = A r^n e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi + n\theta).$$

6° *Représentation géométrique des accélérations de divers ordres.* — Considérons le segment h compris entre la droite

$$(D_n) \qquad y = x \cot n\theta$$

et la courbe (M), sur l'ordonnée du point M.

On a, en appelant x et y les coordonnées du point M,

$$h = x\cot n\theta - y = A e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)\cot n\theta - A e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi)$$

Digitized by Google

ou

$$h = \frac{A e^{-\beta t}\,\omega \sin(\omega t + \varphi + n\theta)}{\sin n\theta} = \frac{1}{r^n \sin n\theta} \times \frac{d^n x}{dt^n}.$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de x s'annule donc à tous les points de rencontre de la spirale (M) avec la droite (D_n).

7° *Résolution géométrique de l'équation des mouvements pendulaires amortis.* — Soit

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\beta \frac{dz}{dt} + (\beta^2 + \omega^2)\, z = 0 \tag{1}$$

l'équation proposée, à laquelle je vais essayer de satisfaire par une expression de la forme

$$z = Z e^{mt}$$

avec

$$m = r e^{i\theta}.$$

Je vais essayer de déterminer r et θ, de façon à satisfaire à (1).

Soit, dans le plan des imaginaires :

$$\overline{OM} = (\beta^2 + \omega^2)\, z,$$
$$\overline{MM'} = 2\beta \frac{dz}{dt},$$
$$\overline{M'M''} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Reportant dans (1), j'ai

$$\overline{OM} + \overline{MM'} + \overline{M'M''} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \overline{OM''} = 0.$$

Donc M'' et O doivent coïncider. Je considère alors le triangle OMM'.

J'ai d'ailleurs

$$\frac{dz}{dt} = r e^{i\theta} z, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = r e^{i\theta} \frac{dz}{dt}.$$

Donc $\overrightarrow{MM'}$ fait avec $\overrightarrow{OM}$ l'angle θ et $\overrightarrow{M'O}$ fait avec $\overrightarrow{MM'}$ le même angle. Donc, le triangle OMM' est isoscèle et l'on a

$$\text{gr. OM} = \text{gr. M'O} \qquad (\text{gr.} = \text{grandeur de...}),$$

c'est-à-dire

$$|z|(\beta^2 + \omega^2) = \left|\frac{d^2 z}{dt^2}\right|;$$

Digitized by Google

or,

$$\left|\frac{d^2z}{dt^2}\right| = r^2|z|,$$

d'où

$$r^2 = \beta^2 + \omega^2,$$

ce qui détermine r.

Projetons OM sur M'M'', il vient

$$\text{gr. OM} \times \cos(\pi - \theta) = \frac{1}{2}\text{gr. MM'},$$

ou

$$-|z|(\beta^2+\omega^2)\cos\theta = \frac{1}{2}2\beta\left|\frac{dz}{dt}\right|;$$

mais

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| = r|z|,$$

d'où

$$\cos\theta = -\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}},$$

ce qui détermine θ.

La forme du triangle OMM' est donc déterminée et Z est arbitraire.

Remarquons alors que, si z satisfait à l'équation différentielle, ses composantes x et y y satisfont aussi, puisque les quantités β et T sont réelles. Prenons donc pour x la partie réelle de

$$z = Z e^{mt}.$$

Supposons qu'au temps $t = 0$, on ait $x = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = x'_0$. L'introduction de ces deux conditions va fixer la position et la grandeur du triangle OMM' et déterminer Z.

Je figure OM au temps $t = 0$, et j'ai

$$\text{OM} = Z = Ae^{\varphi\sqrt{-1}} = X - Y\sqrt{-1}.$$

J'aurai tout d'abord, évidemment,

$$A\cos\varphi = X = x_0.$$

Soit $\overrightarrow{MV}$ la vitesse de M; $\overrightarrow{MV}$ fait avec $\overrightarrow{OM}$ l'angle θ et l'on a

$$\text{gr. MV} = r\,\text{gr. OM} = rA;$$

puis, en projetant sur Ox,

$$\text{gr. MV} \times \cos(\varphi + \theta) = x'_0$$

Digitized by Google

ou

$$rA(\cos\varphi\cos 0 - \sin\varphi\sin 0) = x'_0$$

ou

$$-\beta X - \omega Y = x'_0,$$

d'où

$$Y = -\frac{1}{\omega}(\beta x_0 + x'_0),$$

et par suite

$$Z = x_0 - \frac{\sqrt{-1}}{\omega}(\beta x_0 + x'_0).$$

Il vient donc

$$x = e^{-\beta t}\left[x_0\cos\frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{\omega}(\beta x_0 + x'_0)\sin\frac{2\pi t}{T}\right]$$

avec les conditions initiales

$$x = x_0, \qquad \frac{dx}{dt} = x'_0.$$

Remarquons que, si l'on admet que l'intégrale cherchée est de la forme

$$x = e^{-\beta t}\left(A\cos\frac{2\pi t}{T} + B\sin\frac{2\pi t}{T}\right),$$

il est commode de déterminer A et B en fonction des conditions initiales par un développement en série suivant les puissances de t. Posons $\omega = \frac{2\pi}{T}$, il vient

$$x = (1 - \beta t + \ldots)(A + B\omega t + \ldots),$$
$$x = A + (B\omega - A\beta)t + \ldots = x_0 + x'_0 t + \ldots,$$

d'où

$$A = x_0, \quad B\omega - A\beta = x'_0 \qquad \text{ou} \qquad B = \frac{1}{\omega}(x'_0 + x_0\beta).$$

8° Je pose

$$u = A e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi).$$

On demande la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^\infty u^2\, dt.$$

Si je pose

$$x = \frac{A}{r}\sin(\omega t + \varphi - \theta)e^{-\beta}$$

Digitized by Google

j'aurai

$$\frac{dx}{dt} = u.$$

Or, x satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + (\beta^2+\omega^2)x = 0$$

ou

$$d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] + 2\beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt + d\left[\frac{1}{2}(\beta^2+\omega^2)x^2\right] = 0.$$

On tire de là

$$2\beta\int_0^\infty u^2\,dt = -\left|\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}(\beta^2+\omega^2)x^2\right|_0^\infty.$$

Pour $t=\infty$, on a

$$u = 0, \qquad x = 0;$$

pour $t = 0$, on a

$$u = A\sin\varphi, \qquad x = \frac{A}{r}\sin(\varphi - \theta);$$

d'où

$$-\left|\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}r^2x^2\right|_0^\infty = \frac{1}{2}A^2[\sin^2\varphi + \sin^2(\varphi-\theta)]$$

ou

$$\int_0^\infty u^2\,dt = \frac{A^2}{4\beta}[\sin^2\varphi + \sin^2(\varphi-\theta)].$$

Cas particulier. — Soient $\varphi = 0$ et θ voisin de $\frac{\pi}{2}$, il reste

$$\int_0^\infty u^2\,dt = \frac{A^2}{4\beta},$$

formule importante pour la détermination de β.

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

MÉTHODES DE RÉPÉTITION; SYNCHRONISATION.

Une quantité qui varie suivant une loi périodique amortie peut être considérée comme la projection suivant un axe fixe d'un vecteur dont l'origine reste fixe, tandis que son extrémité, à laquelle je donne le nom de *point figuratif*, décrit une spirale.

Le mouvement du point figuratif sur la spirale est plus intuitif que le mouvement de sa projection sur un axe, de même que le mouvement circulaire uniforme est plus simple que le mouvement pendulaire.

J'emploie donc systématiquement ce mode de représentation et, suivant tantôt Vaschy, tantôt Guillet, j'étudie divers problèmes, et entre autres :

L'effet d'une impulsion, c'est-à-dire, par exemple, de la décharge instantanée d'un condensateur dans un galvanomètre balistique;

L'effet d'une impulsion en cours de route;

La méthode de répétition, dans laquelle on reproduit la décharge chaque fois que l'équipage du galvanomètre repasse au zéro dans le même sens;

La synchronisation, pendant laquelle le mobile reçoit périodiquement une série d'impulsions égales et de même sens, dont la périodicité est ou non en accord avec la période propre du système.

L'étude de la décharge oscillante conduit à examiner les moyens propres à éliminer les étincelles à la rupture du circuit d'un électro-aimant de façon à protéger les contacts contre l'usure.

Je montre, au Chapitre suivant, d'après Breisig, comment on peut réduire et l'intensité et le voltage aux contacts.

EFFET D'UNE IMPULSION.

Je me propose d'étudier le mouvement d'un système amorti en suivant le mouvement du point figuratif sur sa spirale.

Digitized by Google

Le mobile décrit l'axe des x, le point figuratif la spirale. En posant

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

x définit la position du mobile.

Soit (z) le point figuratif, affixe de la quantité imaginaire z

$$z = z_0\, e^{(-\beta+\omega\sqrt{-1})(t-t_0)},$$

(z_0) étant la position du point (z) à l'époque $t = t_0$.

La forme de la spirale ne dépend que de β et ω et non de z_0, car en dérivant on a

$$\frac{dz}{dt} = (-\beta + \omega\sqrt{-1})\, z,$$

équation d'où z_0 a disparu et qui permet de suivre la courbe à partir d'un z quelconque. Il en résulte que si, par un mouvement de rotation, on amène la spirale définie par z_0 à avoir un point commun avec la spirale définie par la valeur Z_0, ce qui peut s'obtenir par une rotation d'ensemble convenable, les deux spirales seront en coïncidence dans toutes leurs parties.

En particulier, si je fais tourner la spirale d'un angle $\psi = \omega t'$ dans le sens du mouvement, son équation deviendra

$$Z = z_0\, e^{\omega t'\sqrt{-1}}\, e^{(-\beta+\omega\sqrt{-1})(t-t_0)}$$

ou

$$Z = z_0\, e^{\beta t'}\, e^{(-\beta+\omega\sqrt{-1})(t+t'-t_0)}.$$

Et l'exponentielle, fonction de t, reprendra les mêmes valeurs que précédemment pour des époques $t_1 = t - t'$.

Quand $\frac{dz}{dt}$ sera devenu parallèle à l'axe des y, le mobile passera par son élongation maximum x_M. Or, on a

$$\frac{dZ}{dt} = e^{\beta t'}(-\beta + \omega\sqrt{-1})\, z_0\, e^{(-\beta+\omega\sqrt{-1})(t+t'-t_0)}.$$

Si donc

$$(-\beta + \omega\sqrt{-1})\, z_0\, e^{(-\beta+\omega\sqrt{-1})(t_M-t_0)}$$

est parallèle à l'axe des y, il en sera de même pour le vecteur $\frac{dZ}{dt}$ à l'époque $t_M - t'$. A ces deux époques, les exponentielles ont la même valeur; d'ailleurs, il vient alors par division

$$z_{t_M} : Z_{t_M - t} = e^{-\beta t'};$$

Digitized by Google

ces vecteurs étant parallèles, puisque leur rapport est réel, les élongations correspondantes x_M et X_M sont dans le même rapport; d'où

$$X_M = x_M e^{\beta t'} \qquad \text{ou} \qquad x_M e^{\frac{\beta\psi}{\omega}}.$$

Plus généralement, supposons que la spirale parte du point M_0, affixe de Z_0, son équation sera

$$Z' = Z_0 e^{(-\beta+\omega\sqrt{-1})(t-t_0)}.$$

Soient

$$z_0 = r e^{\varphi\sqrt{-1}}, \qquad Z_0 = R e^{(\varphi+\psi)\sqrt{-1}}.$$

On aura

$$Z' = \frac{R}{r} e^{\psi\sqrt{-1}} z,$$

et par suite le rapport des élongations maxima du mobile dans le cas de la spirale z et dans le cas de la spirale Z' sera

$$\frac{X_M}{x_M} = \frac{R}{r} e^{\frac{\beta\psi}{\omega}}.$$

Le maximum se produira en effet, pour la même époque que dans le cas précédent, pour Z; mais le module de Z' est $\frac{R}{r}$ fois plus grand.

Voici maintenant l'énoncé du problème que nous voulons résoudre :

Le mobile étant arrivé en M, *on lui communique un supplément de vitesse* ε *d'une façon instantanée, quelle influence l'impulsion ainsi définie aura-t-elle sur les élongations maxima et sur leurs époques?*

Nous transformons la question, en disant : à l'époque t_0, le point figuratif est en (z_0); par suite de l'impulsion, il passe en (Z_0); quels sont les rapports entre les deux mouvements?

On aura évidemment, puisque le mobile, pendant l'impulsion, change de vitesse sans changer de position :

$$Z_0 = z_0 + u\sqrt{-1},$$

u étant une quantité réelle. D'autre part, on aurait pour la spirale que (z) continuerait à suivre :

$$\frac{dz}{dt} = (-\beta + \omega\sqrt{-1})\, z$$

Digitized by Google

et, pour celle qu'il va suivre,

$$\frac{dZ}{dt} = (-\beta + \omega\sqrt{-1})\,Z,$$

d'où

$$\frac{dZ}{dt} - \frac{dz}{dt} = (-\beta + \omega\sqrt{-1})\,(Z - z). \tag{1}$$

Mais au moment de l'impulsion, on a

$$Z - z = u\sqrt{-1},$$

et en projetant sur l'axe des abscisses on a, pour la vitesse de M,

$$\text{proj}\left(\frac{dZ}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) \equiv \varepsilon, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon = -u\omega,$$

d'après l'équation (1).

On a donc

$$Z_0 = z_0 - \frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{-1}. \tag{2}$$

Je poserai

$$z_0 = r\,e^{\varphi\sqrt{-1}}, \qquad Z_0 = R\,e^{(\varphi-\psi)\sqrt{-1}},$$

et par suite le rapport des élongations maxima, après impulsion ou sans impulsion, est

$$\frac{X_M}{x_M} = \frac{R}{r}\,e^{-\frac{\beta}{\omega}\psi}.$$

Il convient donc de calculer $\frac{R}{r}$ et $\tang\psi$.

Or, l'équation (2) donne

$$R\,e^{-\psi\sqrt{-1}} = r - \frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{-1}\,e^{-\varphi\sqrt{-1}} = r + \frac{\varepsilon}{\omega}\,e^{-\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{-1}}.$$

En prenant les modules, il vient

$$R^2 = r^2 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} + \frac{2r\varepsilon}{\omega}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

d'où

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon^2}{r^2\omega^2} - \frac{2\varepsilon}{r\omega}\sin\varphi.$$

On aura de même

$$R\,e^{\psi\sqrt{-1}} = r + \frac{\varepsilon}{\omega}\,e^{\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{-1}},$$

Digitized by Google

d'où

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{e^{\psi\sqrt{-1}} - e^{-\psi\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}\left(e^{\psi\sqrt{-1}} + e^{-\psi\sqrt{-1}}\right)} = \frac{\frac{\varepsilon}{\omega}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{r + \frac{\varepsilon}{\omega}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

ou

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\frac{\varepsilon}{\omega}\cos\varphi}{r - \frac{\varepsilon}{\omega}\sin\varphi}.$$

Dans ces deux formules, l'angle φ n'est autre que ωt_0, si l'on compte les temps à partir du passage du point figuratif par l'axe des abscisses.

On voit que ψ sera nul si l'on a $\cos\varphi = 0$, c'est-à-dire si l'impulsion est donnée, lorsque le mobile passe par sa position d'équilibre.

Lorsque $\psi\,(=\omega t')$ n'est pas nul, les phases du mouvement du mobile sont décalées d'un angle ψ ou d'un temps $t' = \frac{\psi}{\omega}$ sur les phases du mouvement qu'il aurait eu sans l'impulsion.

L'impulsion occasionne un retard quand ε est positif.

MÉTHODE DE RÉPÉTITION.

Le mobile étant dans sa position d'équilibre, on lui communique une vitesse ε ; il en résulte une élongation; il revient vers sa position d'équilibre, la dépasse et, au moment où il repasse de nouveau par la position d'équilibre, on lui communique un supplément de vitesse ε. Chaque fois qu'il repasse ainsi dans le même sens par sa position d'équilibre, on lui communique le même supplément de vitesse. On demande la loi du mouvement.

Si la vitesse ε est communiquée au temps $t = 0$, le mouvement du mobile est

$$x = \frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\beta t}\sin\omega t.$$

La vitesse suit la loi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega} r\, e^{-\beta t}\sin(\omega t + \theta).$$

Elle s'annule pour

$$\omega t + \theta = \pi$$

et l'élongation, qui est alors maximum, a pour valeur

$$x = \frac{\varepsilon}{\omega}\sin\theta\, e^{-\beta\frac{\pi-\theta}{\omega}}.$$

Digitized by Google

Le mobile repasse par l'origine à l'époque $T\left(=\frac{\omega}{2\pi}\right)$ avec la vitesse

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\varepsilon}{\omega}\,r\,e^{-\beta T}\sin\theta \qquad \text{ou} \qquad \frac{dx}{dt}=\varepsilon\,e^{-\beta T}.$$

Par l'impulsion qu'on lui communique, cette vitesse devient

$$\varepsilon\,(1+e^{-\beta T})$$

et le mouvement devient

$$x=\frac{\varepsilon\,(1+e^{-\beta T})}{\omega}\,e^{-\beta t}\sin\omega t.$$

Quand le mobile repassera par l'origine dans le sens des impulsions, on lui communiquera un supplément de vitesse ε. Or, il revient avec la vitesse

$$\varepsilon\,(1+e^{-\beta T})\,e^{-\beta T};$$

sa vitesse devient donc, par l'impulsion,

$$\varepsilon\,(1+e^{-\beta T}+e^{-2\beta T}).$$

On voit la loi. La vitesse après la $n+1^{\text{ième}}$ impulsion serait

$$\varepsilon\,(1+e^{-\beta T}+\ldots+e^{-n\beta T});$$

elle tend vers la limite

$$\frac{\varepsilon}{1-e^{-\beta T}},$$

et l'élongation maximum tend vers la limite correspondante

$$\frac{\varepsilon}{1-e^{-\beta T}}\times\sin\theta\times e^{-\frac{\beta}{\omega}(\pi-\theta)}.$$

EFFET D'IMPULSIONS SYNCHRONES.

Le mobile, soumis à la loi du mouvement périodique amorti, reçoit, à des époques équidistantes dont l'intervalle est égal à la durée d'une période T et à partir d'un moment t_0 situé à une époque quelconque du mouvement, des impulsions égales qui, chaque fois, lui communiquent un même supplément de vitesse ε. Quelle est la loi de son mouvement?

Je porte mon attention sur le point figuratif qui décrit la spirale

$$z=z_0\,e^{(-\beta+\omega\sqrt{-1})\,(t-t_0)}.$$

Digitized by Google

Après l'impulsion, le point figuratif qui était en z_0 est venu en Z_0 et il décrit ensuite la spirale

$$z = Z_0 e^{(-\beta+\omega\sqrt{-1})(t-t_0)}.$$

Mais on a vu que l'on avait

$$Z_0 = z_0 - \frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{-1}.$$

Au bout d'une période, le point figuratif vient en z_1 et l'on a

$$z_1 = Z_0 e^{-\beta T}.$$

A partir de ce moment, tout recommence. On aura donc, d'une façon générale, en appelant z_n et Z_n les affixes du point figuratif avant et après le $(n+1)^{\text{ième}}$ choc :

$$Z_n - z_n = -\frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{-1},$$
$$z_{n+1} = e^{-\beta T} Z_n,$$

d'où

$$z_n = z_0 e^{-n\beta T} - \frac{\varepsilon\sqrt{-1}}{\omega}\frac{e^{-\beta T} - e^{-(n+1)\beta T}}{1 - e^{-\beta T}},$$

$$Z_n = z_0 e^{-n\beta T} - \frac{\varepsilon\sqrt{-1}}{\omega}\frac{1 - e^{-(n+1)\beta T}}{1 - e^{-\beta T}},$$

et, pour n infini, il vient

$$\lim z_n = -\frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{-1}\frac{e^{-\beta T}}{1 - e^{-\beta T}},$$

$$\lim Z_n = -\frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{-1}\frac{1}{1 - e^{-\beta T}}.$$

Le point figuratif tend donc, pour n infini, vers un état de régime permanent indépendant de z_0 et de t_0, et qui est celui qu'on obtient lorsque c'est au moment où le mobile passe par sa position d'équilibre qu'on lui communique le supplément de vitesse ε, c'est-à-dire le choc qui entretient le mouvement.

Le mobile part alors avec la vitesse η du point qui coïncide avec la position d'équilibre, il y repasse au bout d'une période avec une vitesse moindre

$$\eta' = \eta e^{-\beta T};$$

il reprendra donc le même mouvement si le supplément ε de vitesse

Digitized by Google

qu'on lui communique est égal à

$$\varepsilon = \eta_1 (1 - e^{-\beta T}),$$

ce qui détermine η_1.

Soit M l'affixe à ce moment; elle représente la quantité imaginaire $y\sqrt{-1}$. Le point figuratif alors, a la vitesse

$$y\sqrt{-1}\,(-\beta + \omega\sqrt{-1})$$

et la vitesse du mobile est

$$-y\omega.$$

En l'égalant à η_1, on a

$$y = -\frac{\varepsilon}{\omega} \times \frac{1}{1 - e^{-\beta T}},$$

ce qui donne bien la position limite du point figuratif, pour Z, d'après les formules précédentes.

EFFET D'IMPULSIONS ISOCHRONES, DE PÉRIODE Θ, DIFFÉRENTE DE LA PSEUDO-PÉRIODE T DU MOUVEMENT LIBRE.

Le point figuratif étant en (z_0), quand on communique le supplément de vitesse ε au mobile, vient en (Z_0), et l'on a

$$Z_0 = z_0 - \frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{-1}.$$

Le point figuratif part donc de (Z_0) et, au bout du temps Θ, vient en (z_1)

$$z_1 = Z_0\, e^{(-\beta + \omega\sqrt{-1})\,\Theta}.$$

Il reçoit alors une nouvelle impulsion. D'une façon générale, on aura

$$Z_n - z_n = -\frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{-1},$$

$$z_{n+1} = Z_n\, e^{(-\beta + \omega\sqrt{-1})\,\Theta}.$$

Ces formules de récurrence ne diffèrent de celles du cas précédent que par la substitution de

$$e^{(-\beta + \omega\sqrt{-1})\,\Theta} \quad \text{à} \quad e^{-\beta T}.$$

Il suffira donc, dans les formules de résolution, de faire la même substitution.

Digitized by Google

Pour $n = \infty$, on arrivera donc à deux affixes (z_∞) et (Z_∞) indépendantes des conditions initiales, et le mobile oscille entre les deux amplitudes correspondantes.

Le point figuratif décrit toujours la même spire de (Z_∞) à (z_∞), puis il passe instantanément de (z_∞) à (Z_∞). Le mobile le suit comme son ombre, puisqu'il occupe la position de la projection du point figuratif sur l'axe des abscisses.

C'est le problème de la synchronisation.

Le problème précédent était celui de l'entretien.

Enfin, la méthode de répétition est utile pour augmenter la sensibilité dans les procédés de réduction au zéro.

Terminons par une remarque relative au problème de la synchronisation.

Faisons tendre ε et θ simultanément vers zéro, avec

$$\lim \frac{\varepsilon}{\theta} = k \qquad \text{pour} \qquad \theta = 0.$$

J'aurai

$$z_\infty = -\frac{k}{\omega}\sqrt{-1}\,\frac{1}{-\beta+\omega\sqrt{-1}} = \frac{k}{\omega}\,\frac{-\omega+\beta\sqrt{-1}}{\beta^2+\omega^2}.$$

Si je pose

$$z_\infty = X + Y\sqrt{-1},$$

j'ai donc

$$\frac{Y}{X} = \cot 0.$$

On voit que le point figuratif tend à se placer sur la droite de vitesse nulle et il oscille au voisinage de cette droite.

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

DÉCHARGE OSCILLANTE DU CONDENSATEUR.

Après avoir étudié les fonctions sinusoïdales amorties, j'étudie ici les fonctions hyperboliques et les fonctions hyperboliques amorties.

Je donne la valeur de leurs dérivées d'ordre n et l'équation de récurrence qui existe entre les dérivées des ordres n, $n+1$, $n+2$.

Une relation analogue existe d'ailleurs pour les fonctions sinusoïdales amorties.

Pour illustrer cette théorie, j'étudie le mouvement du galvanomètre à cadre mobile et les circonstances de ce mouvement suivant la valeur de la résistance attachée entre ses deux bornes.

Je traite de même le cas de la balance apériodique de précision de Curie et je fais la théorie de son amortisseur.

Le problème électrique fondamental est d'ailleurs le problème de la décharge oscillante du condensateur.

Il convient de remarquer tout d'abord qu'on a bien affaire à un système ayant deux degrés de liberté.

Je développe la solution et je discute les valeurs que prend le décrément logarithmique et la fréquence dans les divers cas, suivant les variations de la capacité, de la résistance et de l'inductance.

Je résous le problème en me donnant la charge initiale du condensateur et l'intensité initiale du courant dans l'inductance.

Puis j'étudie la variation de l'énergie totale, présente sous forme électrique et magnétique, dans le condensateur et la bobine, respectivement. Cette énergie décroît peu à peu; je rattache sa considération à celle d'un point figuratif.

Je ramène l'équation à sa forme réduite et je reproduis les traits essentiels de la théorie de Curie.

J'applique la théorie de la charge du condensateur à la recherche des moyens propres à éviter les étincelles aux contacts qui se trouvent, en télégraphie, intercalés dans le circuit d'un relais.

Digitized by Google

FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

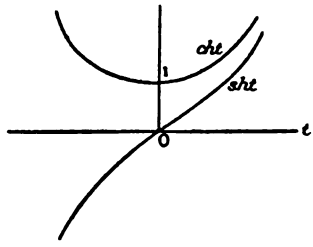
1. Définitions. — Les fonctions y et x de t, que l'on appelle *sinus* et *cosinus hyperboliques* de t, et que l'on représente par $\operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch} t$, sont définies par les équations

$$x = \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \tag{1}$$

$$y = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \tag{2}$$

Elles sont représentées par les courbes suivantes, l'axe des abscisses est celui des t et les ordonnées donnent respectivement $\operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch} t$.

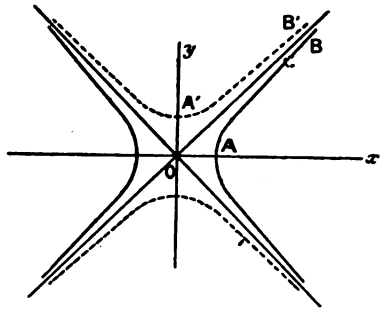
Fig. 10.



Des équations de définition (1) et (2), on tire

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x' \quad\quad = y, \\ y' \quad\quad = x. \end{cases} \tag{3}$$

Fig. 11.



Donc, le point M de coordonnées (xy) décrit la branche AB de l'hyperbole équilatère fondamentale (2) quant t varie de o à $+\infty$, et

Digitized by Google

le point M′ de l'hodographe, dont les coordonnées sont les dérivées de x et de y par rapport à t, décrit la branche A′B′ de l'hyperbole conjuguée. Les points M et M′ restent symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $y\,O\,x$.

2. Propriétés principales. — 1° *Vitesse aréolaire.* — La vitesse aréolaire est

$$\frac{1}{2}(y'x - x'y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}.$$

Elle est constante.

2° Considérons les deux points $M(xy)$ et $M_1(x_1y_1)$ correspondant aux valeurs t et $t_1 = t + t_0$ du paramètre t; la surface comprise entre la courbe et les deux rayons vecteurs OM et OM_1 restera constante lorsque t variera.

3° On a

$$\operatorname{ch} t = \cos\frac{t}{\sqrt{-1}} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} t = \sqrt{-1}\sin\frac{t}{\sqrt{-1}}.$$

Il est donc facile de transposer les formules de la trigonométrie. On a, par exemple :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b.$$

On le vérifie aisément directement en effectuant les produits dans la formule correspondante ci-après :

$$\frac{1}{2}(e^{a+b} + e^{-a-b}) = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) \times \frac{1}{2}(e^b + e^{-b}) + \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}) \times \frac{1}{2}(e^b - e^{-b}).$$

En particulier, on a

$$\operatorname{ch}^2\frac{a}{2} = \frac{1+\operatorname{ch} a}{2}, \qquad \operatorname{sh}^2\frac{a}{2} = \frac{\operatorname{ch} a - 1}{2}.$$

3. Fonctions hyperboliques amorties. — Je définirai ces fonctions x et y par les équations

$$(A) \qquad x = e^{-\beta t}\operatorname{ch}\alpha t, \qquad y = e^{-\beta t}\operatorname{sh}\alpha t.$$

J'appellerai M le point qui a pour coordonnées (xy). Le point $N(\xi, \eta)$, où le rayon vecteur OM coupe l'hyperbole équilatère fondamentale, a pour coordonnées

$$\xi = \operatorname{ch}\alpha t, \qquad \eta = \operatorname{sh}\alpha t.$$

Digitized by Google

Les dérivées par rapport à t sont

$$x' = e^{-\beta t}(-\beta \operatorname{ch}\alpha t + \alpha \operatorname{sh}\alpha t),$$
$$y' = e^{-\beta t}(-\beta \operatorname{sh}\alpha t + \alpha \operatorname{ch}\alpha t).$$

On a donc

$$(A') \qquad \begin{cases} x' = -\beta x + \alpha y, \\ y' = -\beta y + \alpha x. \end{cases}$$

Considérons le cas où l'on a

$$\beta > \alpha > 0.$$

Si je pose

$$\beta = r \operatorname{ch}\theta, \qquad \alpha = r \operatorname{sh}\theta,$$

d'où

$$r^2 = \beta^2 - \alpha^2 \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{1}{2}\log\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha},$$

r et θ seront réels et il vient

$$x' = -r e^{-\beta t}\operatorname{ch}(\alpha t - \theta),$$
$$y' = -r e^{-\beta t}\operatorname{sh}(\alpha t - \theta).$$

Soient M′ le point qui a pour coordonnées (x', y') et N′ le point où le rayon vecteur OM′ coupe l'hyperbole équilatère fondamentale.

Le point N′ se déduit aisément du point N; la surface comprise entre cette hyperbole et les deux rayons ON, ON′ reste constante quant t varie et la tangente en M est parallèle à ON′.

Mouvement du point M. — On peut imaginer que, tandis que le point N se déplace sur l'hyperbole équilatère (1) avec une vitesse aréolaire constante, le point M, qui reste sur le même rayon vecteur, demeure sur une hyperbole qui se contracterait en restant semblable à cette hyperbole équilatère, le rapport d'homothétie tendant vers zéro ($\beta > 0$) suivant la loi exponentielle $e^{-\beta t}$.

Dérivées successives. — En prenant la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée des équations A′, on a

$$x^{(n)} = -\beta x^{(n-1)} + \alpha y^{(n-1)},$$
$$y^{(n)} = -\beta y^{(n-1)} + \alpha x^{(n-1)}.$$

On peut satisfaire à ces formules de récurrence en posant

$$x^{(n)} = z X^n, \qquad y^{(n)} = z' X^n,$$

Digitized by Google

car elles deviennent

$$z\,X^n = -\beta z\,X^{n-1} + \alpha z' X^{n-1},$$
$$z'X^n = -\beta z' X^{n-1} + \alpha z\,X^{n-1}$$

ou

$$z\,(X+\beta) = \alpha z',$$
$$z'(X+\beta) = \alpha z.$$

L'élimination de z donne

$$(X+\beta)^2 = \alpha^2,$$

d'où

$$X = -\beta + \alpha, \quad z = z' \qquad \text{ou} \qquad X = -\beta - \alpha, \quad z = -$$

On déduit de là

$$(A_n) \qquad \begin{cases} x^{(n)} = \dfrac{x+y}{2}(\alpha-\beta)^n - (-1)^n \dfrac{y-x}{2}(\alpha+\beta)^n, \\ y^{(n)} = \dfrac{x+y}{2}(\alpha-\beta)^n + (-1)^n \dfrac{y-x}{2}(\alpha+\beta)^n, \end{cases}$$

car $x^{(n)}$ et $y^{(n)}$ sont bien de la forme voulue et, de plus, en faisant $n=1$, on retombe sur les formules (A'). L'exactitude de ces expressions est donc démontrée par voie de récurrence.

Équation différentielle du second ordre. — En différentiant la première équation (A'), on a

$$x'' + \beta x' = \alpha y' = \alpha(-\beta y + \alpha x) = \alpha^2 x - \beta(x' + \beta x)$$

ou

$$x'' + 2\beta x' + (\beta^2 - \alpha^2)x = 0.$$

Dans le cas où l'on a $\beta > 0$, $\beta^2 > \alpha^2$, cette équation se confond avec l'équation que donnent la Mécanique et la Physique pour les mouvements amortis :

$$(1) \qquad x'' + 2\beta x' + \gamma^2 x = 0.$$

Les considérations algébriques précédentes subsistent, quelles que soient les constantes β, γ. Donc, comme de l'équation (1) on tire

$$x^{(n+2)} + 2\beta x^{(n+1)} + \gamma^2 x^{(n)} = 0,$$

on voit que trois dérivées successives sont reliées par une formule linéaire de récurrence; et les formules que nous avons données pour

Digitized by Google

les dérivées successives des fonctions circulaires ou hyperboliques amorties donnent la solution du problème qui consiste à trouver la fonction u_n définie par la loi de récurrence

$$u_{n+1} + 2\beta u_n + \gamma^2 u_{n-1} = 0,$$

en partant des valeurs initiales données u_0 et u_1.

MOUVEMENT DU GALVANOMÈTRE A CADRE MOBILE.

Je suppose connue la description du galvanomètre Despretz-d'Arsonval.

Soient α l'angle de déviation compté à partir de la position d'équilibre, c le couple de torsion du fil de suspension par unité d'angle ou radian; l'énergie potentielle élastique est $\frac{1}{2} c\alpha^2$ et le couple tendant à ramener l'équipage est $c\alpha$.

Soit $I = \Sigma mr^2$ le moment d'inertie du cadre mobile; l'énergie cinétique est

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

et la force d'inertie est

$$- I \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Soient s la surface moyenne d'une spire de la bobine mobile, n le nombre des tours de cette bobine, i l'intensité du courant électrique.

Soit h l'intensité du champ magnétique dans lequel oscillent les côtés du cadre.

Le moment du couple directeur est $nhsi$.

Le courant i est pris positivement dans le sens qui donne un couple positif.

L'équation mécanique du mouvement du cadre est

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - C\alpha + nshi.$$

Fermons le circuit du galvanomètre sur une résistance R', et soit R la résistance propre du cadre mobile. Négligeons la self-inductance du circuit.

Digitized by Google

On aura, pour l'équation du mouvement de l'électricité,

$$(R + R')i = - nhs\frac{dx}{dt}.$$

Le second membre représente, en effet, le flux instantané coupé.

L'élimination de i donne l'équation du mouvement du cadre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + (\beta^2 + \omega^2)x = 0,$$

en posant

$$\beta = \frac{(nsh)^2}{l(R + R')}, \qquad \beta^2 + \omega^2 = \frac{c}{l}.$$

On peut toujours donner à R' une valeur très grande, alors β est très petit et ω est réel. Le mouvement est périodique amorti. Mais, en faisant $\omega = 0$, on détermine une valeur critique

$$R' = \frac{(nsh)^2}{\sqrt{cl}} - R,$$

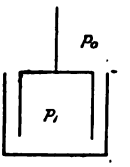
qui est positive, d'après les valeurs numériques résultant des données de construction.

Si R' est plus petit, le mouvement est apériodique (fonction hyperbolique amortie).

MOUVEMENT DE LA BALANCE APÉRIODIQUE DE PRÉCISION DE CURIE.

Cette balance est munie d'amortisseurs à cloche. Aux deux fléaux sont accrochés des cylindres métalliques qui entrent à chicane dans les intervalles annulaires de cylindres coaxiaux fixes.

Fig. 12.



La pression atmosphérique étant p_0, si la cloche s'abaisse, elle comprime l'air à une pression p_1; en même temps, il s'échappe par l'intervalle annulaire. La force due à l'air qui s'exerce sur la cloche

Digitized by Google

est

$$\pi R^2(p_1 - p_0).$$

en appelant R le rayon de la cloche. Une fois l'équilibre établi, l'air reprend la même pression partout. La réaction de l'air au mouvement de la cloche ne trouble donc pas les conditions de l'équilibre définitif.

Soient α l'angle de déviation du fléau, L la longueur des bras; la vitesse du déplacement de la cloche est $L\frac{d\alpha}{dt}$, la force due à l'air sera de la forme

$$\gamma L \frac{d\alpha}{dt}$$

et son moment sera

$$\gamma L^2 \frac{d\alpha}{dt},$$

γ étant le coefficient d'amortissement total des deux amortisseurs.

Soient M la masse du fléau, ρ son rayon de giration, $M\rho^2$ son moment d'inertie; soit M_1 la masse de la charge sur les couteaux extrêmes; le moment d'inertie qui leur sera dû sera

$$2M_1L^2.$$

Le couple dû à l'action de la pesanteur est sensiblement, pour de petites déviations : $-Mgl\alpha$ (g accélération de la pesanteur, l distance du couteau central au centre de gravité).

L'équation du mouvement est donc

$$(M\rho^2 + 2M_1L^2)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + L^2\gamma\frac{d\alpha}{dt} + Mgl\alpha = 0.$$

C'est une équation du type que nous avons étudié.

DÉTERMINATION DE γ.

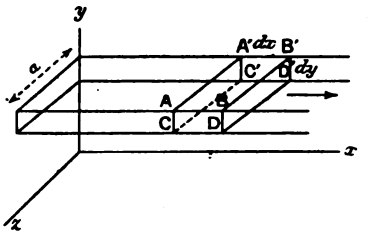
Considérons un fluide en régime permanent qui se meut, dans la direction Ox, entre les plans matériels $y = 0$, $y = e$, par tranches parallèles au plan des zOx. Appelons a la largeur de la veine dans le sens Oz.

Cherchons les conditions d'équilibre d'un élément parallélépipédique ABCD, A'B'C'D'. La face AC, A'C' est soumise à la pression $pa\,dy$. La face opposée à la pression : $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)a\,dy$.

Digitized by Google

Si v est la vitesse à la hauteur y de la face inférieure, si j'appelle η_1 le coefficient de viscosité, la face CD C'D' sera soumise à la force $-\eta_1 \frac{\partial v}{\partial x} a\,dx$, la face opposée à la force $\left(+\eta_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dy\right) a\,dx$.

Fig. 13.



Comme le mouvement du fluide est supposé uniforme, la force d'inertie du fluide est nulle; il reste donc

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Le second membre est indépendant de x, donc $\frac{\partial p}{\partial x}$ est une constante et l'on pourra écrire

$$p = p_1 + (p_0 - p_1)\frac{x}{l}$$

si, pour $x = 0$, on a la pression p_1, et pour $x = l$ la pression p_0.

L'équation devient

$$\frac{(p_0 - p_1)}{l} = \eta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

d'où

$$v = \frac{p_0 - p_1}{2\eta_1 l} y(y - e),$$

puisque v doit s'annuler au contact des parois $y = 0$, $y = e$, auxquelles nous admettons qu'il adhère.

Le débit sera

$$a \int_0^e v\,dy = a \frac{p_0 - p_1}{2\eta_1 l} \left| \frac{y^3}{3} - e\frac{y^2}{2} \right|_0^e = \frac{a(p_1 - p_0)e^3}{12\eta_1 l}.$$

Si le rayon des amortisseurs à cloche est assez grand, l'influence de la courbure cylindrique est négligeable; on peut appliquer la formule ci-dessus. On fera

$$a = 2\pi R.$$

Digitized by Google

Le débit sera

$$\pi R^2 L \frac{d\alpha}{dt}.$$

En l'égalant à la valeur qui vient d'être trouvée, on a

$$\pi R^2 L \frac{d\alpha}{dt} = 2\pi \frac{R(p_1 - p_0)e^3}{12\eta_1 l}.$$

On a, d'autre part, en égalant deux expressions du moment d'amortissement,

$$\pi R^2 (p_1 - p_0) L = \gamma L^2 \frac{d\alpha}{dt},$$

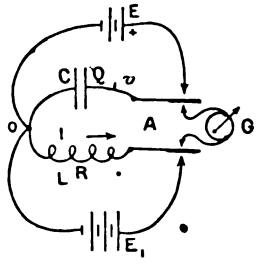
d'où, par multiplication membre à membre, après suppression des facteurs communs,

$$\gamma = 6\pi\eta_1 l \left(\frac{R}{e}\right)^3.$$

DÉCHARGE OSCILLANTE DU CONDENSATEUR.

Soit A une clé double au moyen de laquelle on peut charger le condensateur C, au moyen d'une pile E, d'une quantité d'électricité Q, en même temps que l'on fait passer dans la bobine (L, R), au moyen de la pile E', un courant I. On pourra, en ramenant la clé double sur son autre position, décharger le condensateur sur la bobine et réciproquement, d'ailleurs, si l'on préfère s'exprimer ainsi, la

Fig. 14.



bobine sur le condensateur. Le circuit sera alors fermé par G, où j'ai figuré schématiquement un indicateur du courant tel qu'un oscillographe.

Considérons le circuit pendant la décharge oscillante : soit q la

Digitized by Google

charge du condensateur à l'époque t; ce sera, par exemple, la quantité d'électricité sur l'armature de droite; j'appellerai v l'excès de potentiel de l'armature de droite sur l'armature de gauche et, si la capacité du condensateur est C, j'aurai

$$q = Cv.$$

A l'époque initiale, j'aurai

$$Q = CE$$

et je pourrai disposer de E pour donner à Q une valeur initiale arbitraire.

J'appelle i le courant dans la bobine et je choisis, pour sens positif du courant, le sens dans lequel le courant tendrait à charger positivement l'armature de droite. Dans ces conditions, la loi de Faraday donne

$$i = \frac{dq}{dt},$$

c'est-à-dire que le courant i peut être considéré comme la vitesse de la variable q.

A l'époque initiale, j'aurai

$$I = \frac{E'}{R}$$

en appelant E' la force électromotrice de la pile de charge de la bobine, et je pourrai disposer de E' de façon à donner à q une vitesse initiale arbitraire, c'est-à-dire à i une valeur quelconque I.

Il y a donc, dans le problème de décharge du condensateur à travers une bobine, deux constantes arbitraires Q et I.

L'énergie emmagasinée dans le condensateur sous forme électrique ou potentielle est

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

La différence de potentiel v tend à ramener le condensateur à l'état neutre et agit comme une force élastique.

L'énergie emmagasinée dans la bobine sous forme magnétique ou cinétique est

$$\frac{1}{2} L i^2.$$

Digitized by Google

La force d'inertie correspondante ou force électromotrice d'induction est dirigée de façon à s'opposer à toute variation de courant et a par suite pour expression

$$-L\frac{di}{dt},$$

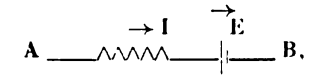
si l'on prend comme positives les forces électromotrices qui tendraient à faire circuler un courant dans le sens pris comme positif.

La différence de potentiel ohmique Ri représente une force de viscosité agissant en sens inverse du courant.

Si donc on écrit qu'il y a équilibre entre les diverses forces qui agissent sur la variable q, on a

$$-L\frac{di}{dt}-Ri-v=0, \qquad i=C\frac{dv}{dt}.$$

On peut dire encore que la différence de potentiel $-v$ est égale à la chute de potentiel ohmique Ri diminuée de la force électromotrice $-L\frac{di}{dt}$, en vertu de la formule



$$V_A - V_B = RI - E,$$

avec les conventions de signes marquées sur la figure.

Enfin, une façon, équivalente, de poser l'équation du problème consiste à écrire que la diminution de l'énergie totale, électrique et magnétique, est égale à la dissipation d'énergie sous forme de chaleur; on obtient ainsi

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)=Ri^2.$$

On voit immédiatement, sous cette forme, que si R est nul, il reste

$$\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\text{const.},$$

c'est-à-dire que le point figuratif du système, de coordonnées q et i, décrit une ellipse; quand le point figuratif a fait un tour d'ellipse, le système repasse par les mêmes conditions; on a donc un régime périodique.

Digitized by Google

Si les données initiales sont Q et I, on a

$$\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}=\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

Le régime oscillatoire dépend donc essentiellement des données initiales. Si l'on vient à donner au système un déplacement accidentel δQ ou une impulsion accidentelle $L\delta I$, l'ellipse sera transformée en une autre ellipse concentrique et le système n'aura aucune tendance à revenir à l'état de régime antérieur.

Si, au contraire, R n'est pas égal à zéro, le système tend vers le repos $i=0$, $q=0$, car l'énergie totale décroît constamment et ne peut cesser de décroître que si l'on a $i=0$ définitivement, ce qui entraîne $L\frac{di}{dt}=0$, $v=0$ et $q=0$.

L'état de repos est donc l'état de régime final du système.

Quand R n'est pas nul, on peut continuer à considérer l'état du système comme représenté par le point de coordonnées (q, i); ce point décrira toujours une ellipse, mais cette ellipse diminuera de dimensions tout en restant constamment homothétique à l'une de ses configurations.

Chaque fois que le point figuratif passe sur l'axe des x ou sur l'axe des y, l'énergie cinétique ou l'énergie potentielle s'annule. L'énergie magnétique et l'énergie électrique se transforment incessamment l'une dans l'autre, la perte d'énergie, dans l'intervalle des transformations, correspondant à la chaleur dégagée suivant la loi de Joule.

Il peut, cependant, arriver que le décroissement de l'ellipse soit si rapide que le point figuratif reste constamment dans le même quadrant. Il n'y aura, dans ce cas, qu'un mouvement apériodique. Il est facile de faire la discussion. L'équation du mouvement est

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\frac{R}{2L}\frac{dq}{dt}+\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}\right)^2q=0,$$

ce qui donne, par assimilation avec l'équation générale (I),

$$\beta=\frac{R}{2L},\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

Le mouvement sera donc apériodique, si l'on a

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2>\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad R>2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Digitized by Google

La pulsation sera

$$\omega = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{CL}}\sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}.$$

La pseudo-période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\sqrt{CL}}{\sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}}.$$

Le décrément logarithmique βT sera

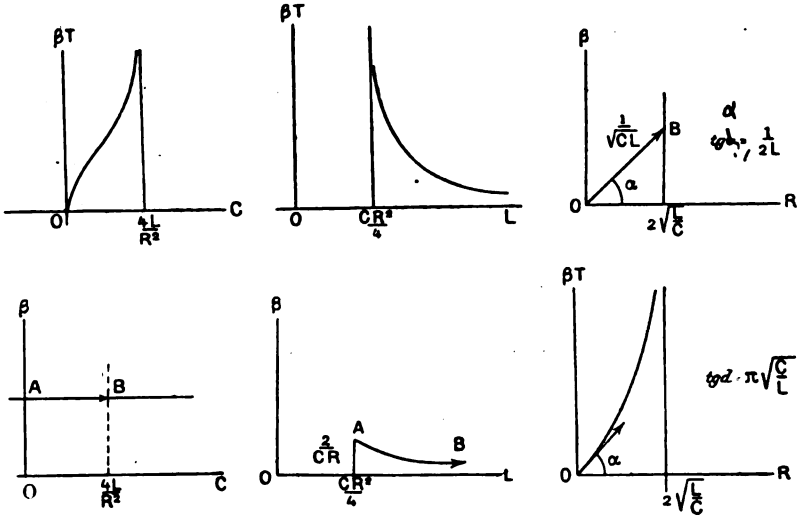
$$\beta T = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}}.$$

1° *Discussion du décrément logarithmique.* — Je pose $\beta T = y$, puis successivement je fais $x = C$, $x = L$, $x = R$; j'ai les trois formules

$x = C.$ $\qquad$ $x = L.$ $\qquad$ $x = R.$

$$y = \frac{\pi R}{\sqrt{L}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{R^2}{4L}}}, \qquad y = \frac{\pi R\sqrt{C}}{\sqrt{x - \frac{CR^2}{4}}}, \qquad y = \pi\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{C}{4L}x^2}}.$$

Fig. 15.



2° *Discussion de la fréquence.* — Je pose, de même, $y = 2\pi N = \frac{2\pi}{T}$,

Digitized by Google

N étant la fréquence, et je fais successivement $x = C$, $x = L$, $x = R$; j'ai les trois formules

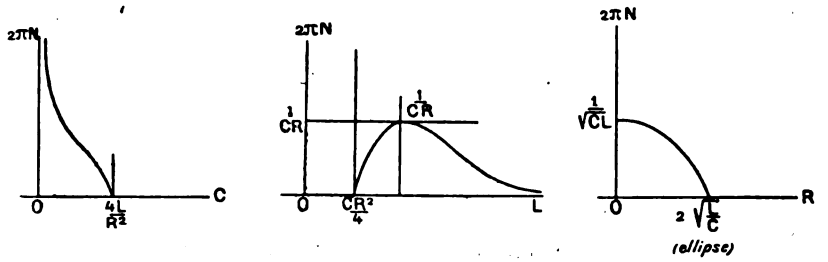
$$x = C. \qquad y = \frac{1}{\sqrt{L}}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{R^2}{4L}},$$

$$x = L. \qquad y = \frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{\frac{1}{x}\left(1 - \frac{CR^2}{4x}\right)},$$

$$x = R. \qquad y = \frac{1}{\sqrt{CL}}\sqrt{1 - \frac{Cx^2}{4L}}.$$

A ces formules correspondent les courbes suivantes :

Fig. 16.



Remarque. — Si l'on ne fait varier que L ou que R, la fréquence a un maximum. Donc, pour obtenir à coup sûr une fréquence élevée, il conviendra d'agir sur C. En télégraphie sans fil, ce sont des condensateurs variables de très faible capacité qui permettront d'obtenir facilement de très courtes longueurs d'onde, et, en même temps, le décrément logarithmique tendra vers zéro. Si l'on peut diminuer R, les effets seront concordants, la fréquence sera augmentée et le décrément logarithmique diminué.

Cas particuliers. — 1° $L = 0$, $q = Q$ pour $t = 0$.

Solution :

$$q = Q \exp\left(-\frac{t}{CR}\right), \qquad \tau = CR.$$

Cette loi de décharge du condensateur a été vérifiée par MM. de Nerville et Cailho, en utilisant un commutateur calé sur l'arbre des cames d'un Hughes, τ est la constante de temps.

2° $R = 0$ et $i = 0$, $q = Q$ pour $t = 0$.

Solution :

$$q = Q \cos\frac{t}{\sqrt{CL}}, \qquad \theta = 2\pi\sqrt{CL}.$$

Revenons au cas général.

Digitized by Google

On peut exprimer le décrément logarithmique et la pseudo-période en fonction des constantes de temps τ et Θ de ces deux cas particuliers :

$$\tau = CR \qquad \text{et} \qquad \Theta = 2\pi\sqrt{CL}.$$

On a, en effet,

$$\beta T = 2\pi \times \frac{\pi\tau}{\Theta} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi\tau}{\Theta}\right)^2}}, \qquad T = \frac{\Theta}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi\tau}{\Theta}\right)^2}}.$$

Toutes les fois que $\frac{\pi\tau}{\Theta} = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}$ est petit, on peut se contenter des valeurs approchées

$$\beta T = 2\pi \times \frac{\pi\tau}{\Theta}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\tau}{\Theta}\right)^2\right], \qquad T = \Theta\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\tau}{\Theta}\right)^2\right].$$

Rappelons que $\frac{\pi\tau}{\Theta} < 1$ est la condition pour que le régime soit périodique amorti. Supposons cette condition remplie.

Les formules de résolution du problème sont :

$$\text{A)} \qquad \begin{cases} q = Q\ e^{-\beta t}\dfrac{\cos(\omega t + \psi)}{\cos\psi}, \\ i = Qr\,e^{-\beta t}\dfrac{\cos(\omega t + \theta + \psi)}{\cos\psi}; \end{cases}$$

ψ étant un angle de phase dépendant des conditions initiales et les constantes θ et r ayant la même signification que dans l'étude générale des fonctions périodiques amorties. C'est par la règle de dérivation donnée alors que l'on déduit de q sa dérivée i.

Développant q, il vient

$$q = e^{-\beta t}(Q\cos\omega t - \operatorname{tang}\psi\, Q\sin\omega t).$$

Or, on avait

$$x = e^{-\beta t}\left(x_0\cos\omega t + \frac{\beta x_0 + x'_0}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Ici

$$x_0 = Q, \quad x'_0 = I \qquad \text{et} \qquad -\operatorname{tang}\psi = \frac{\beta x_0 + x'_0}{\omega},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{\beta Q + I}{\omega}.$$

Ce qui détermine ψ en fonction des données initiales Q et I.

Digitized by Google

Il y a deux cas simples à envisager :

1° $\qquad I = 0;$

2° $\qquad Q = 0,$

auxquels correspondent les formules suivantes, vérifiables à vue d'après la règle de dérivation des fonctions périodiques amorties :

$$q = -Q\, e^{-\beta t}\frac{\sin(\omega t - \theta)}{\sin\theta}, \qquad q = \frac{I}{r}e^{-\beta t}\frac{\sin\omega t}{\sin\theta},$$

$$i = -Qre^{-\beta t}\frac{\sin\omega t}{\sin\theta}, \qquad i = Ie^{-\beta t}\frac{\sin(\omega t + \theta)}{\sin\theta}.$$

Or, en vertu du caractère linéaire de l'équation différentielle du mouvement amorti, le cas général doit s'obtenir par superposition de ces deux cas particuliers; on pourra donc écrire, dans le cas général (et cette manière de procéder est la plus symétrique) :

$$(1) \qquad q = \frac{e^{-\beta t}}{\sin\theta}\left[-Q\sin(\omega t - \theta) + \frac{I}{r}\sin\omega t\right],$$

$$(2) \qquad i = \frac{e^{-\beta t}}{\sin\theta}\left[Qr\sin\omega t + I\sin(\omega t + \theta)\right].$$

L'énergie

$$W = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

sera de la forme

$$W = (MQ^2 + 2NIQ + PI^2)\frac{e^{-2\beta t}}{\sin^2\theta}$$

et le coefficient N ne sera pas nul, comme nous le verrons plus loin; il faut donc se garder d'appliquer à l'énergie le principe de superposition qui est justifié pour q et pour i.

Si je porte $q = OM$ en abscisse, je dirai que M est le mobile, et si (z) est l'affixe de la quantité imaginaire

$$z = A\, e^{(-\beta + \omega\sqrt{-1})(t - t_0)},$$

alors que l'on a

$$\overline{OM} = A\, e^{-\beta t}\cos\omega(t - t_0),$$

je dirai que (z) est le point figuratif.

En général, il est plus commode de considérer le mouvement du point figuratif sur sa spirale que le mouvement du mobile. La vitesse i du mobile M, c'est-à-dire la dérivée de q, s'obtient en projetant la vitesse du point figuratif sur l'axe des abscisses.

Digitized by Google

1° M'écartant un moment de ce mode de représentation, que je ne rappelle que pour éviter des confusions, je vais envisager maintenant comme point figuratif le point (xy) qui a pour coordonnées

$$x = q\frac{1}{\sqrt{C}}, \qquad y = i\sqrt{L}.$$

Je poserai

$$X = Q\frac{1}{\sqrt{C}}, \qquad Y = I\sqrt{L},$$

ce qui permettra d'écrire les équations (1) et (2) sous la forme

$$x = \xi e^{-\beta t}, \qquad y = \eta e^{-\beta t} \tag{3}$$

avec

$$\begin{cases} \xi \sin\theta = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \\ \eta \sin\theta = a'\cos\omega t + b'\sin\omega t \end{cases} \tag{4}$$

et

$$\begin{cases} a = X\sin\theta, & b = -X\cos\theta + Y, \\ a' = Y\sin\theta, & b' = -X + Y\cos\theta. \end{cases} \tag{5}$$

L'élimination de t entre les équations (4) donne

$$\frac{(ab' - ba')^2}{\sin^2\theta} = (a^2 + b^2)\xi^2 + (a'^2 + b'^2)\eta^2 - 2(aa' + bb')\xi\eta.$$

Mais on a

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = \frac{1}{\cos\theta}(aa' + bb') = -\frac{(ab' - ba')}{\sin\theta} = X^2 + Y^2 - 2XY\cos\theta.$$

Le point (ξ, η) décrit donc l'ellipse

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\eta\xi\cos\theta = X^2 + Y^2 - 2XY\cos\theta.$$

2° Je pose

$$\xi = \rho\cos\chi, \qquad \eta = \rho\sin\chi,$$

il viendra

$$\rho^2(1 - \cos\theta\sin 2\chi) = X^2 + Y^2 - 2XY\cos\theta;$$

or, on a

$$X^2 + Y^2 - 2XY\cos\theta = \frac{1}{C}Q^2 + LI^2 + RIQ$$

et l'énergie W est donnée par

$$2W = \frac{1}{C}q^2 + Li^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 e^{-2\beta t},$$

Digitized by Google

de sorte qu'il reste

$$2W = e^{-2\beta t} \times \frac{\frac{Q^2}{C} + LI^2 + RIQ}{1 - \cos\theta \sin 2\psi}.$$

3° Je dis d'ailleurs que l'angle χ varie de façon que ρ balaye des surfaces égales dans des temps égaux.

Le double de la vitesse aréolaire du point (ξ, η) est, en effet,

$$\left|\begin{matrix}\xi & \eta \\ \xi' & \eta'\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}a\cos\omega t + b\sin\omega t & \omega(-a\sin\omega t + b\cos\omega t) \\ a'\cos\omega t + b'\sin\omega t & \omega(-a'\sin\omega t + b'\cos\omega t)\end{matrix}\right| : \sin^2\theta,$$

ce qui, d'après la règle des produits des déterminants, est

$$\left|\begin{matrix}a & b \\ a' & b'\end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix}\cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{matrix}\right| \omega : \sin^2\theta$$

ou

$$\omega(ab' - ba') : \sin^2\theta = \frac{1}{\sqrt{CL}}\left(\frac{Q^2}{C} + LI^2 + RIQ\right).$$

4° D'ailleurs, la valeur initiale de χ s'obtient en faisant

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2 \qquad \text{et} \qquad t = 0$$

d'où

$$\sin 2\chi_0 = \frac{QI}{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

On aurait $\chi_0 = \frac{\pi}{4}$, si l'on avait $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2$.

5° L'expression de W, en fonction de t, est d'ailleurs facile à écrire d'une façon explicite; il suffit de former $\xi^2 + \eta^2$.

Or, on a

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 &= (X^2 + Y^2)\sin^2\theta, \\ b^2 + b'^2 &= (X^2 + Y^2)(1 + \cos^2\theta) - 2XY\cos\theta, \\ ab + a'b' &= \sin\theta\cos\theta(Y^2 - X^2); \end{aligned}$$

d'où

$$\xi^2 + \eta^2 = (X^2 + Y^2)\cos^2\omega t + \left[(X^2 + Y^2)\frac{1 + \cos^2\theta}{1 - \cos^2\theta} - \frac{2XY\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]\sin^2\omega t + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(Y^2 - X^2)\sin\omega t\cos\omega t.$$

Digitized by Google

Or, on a

$$r\cos\theta = -\beta = -\frac{R}{2L},$$
$$r\sin\theta = \omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}},$$
$$r = \frac{1}{\sqrt{CL}};$$

d'où

$$\frac{1+\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{1+\dfrac{CR^2}{4L}}{1-\dfrac{CR^2}{4L}}, \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{\beta}{\omega} = -\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{CR^2}{4L}}}$$

et, par suite, on a

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c} + \frac{1}{2}Li^2 = (A\cos^2\omega t + B\sin^2\omega t + K\sin\omega t\cos\omega t)e^{-2\beta t},$$

avec

$$A = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{c} + \frac{1}{2}LI^2,$$
$$B = \frac{1}{1-\dfrac{CR^2}{4L}}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{c} + \frac{1}{2}LI^2\right)\left(1+\frac{CR^2}{4L}\right) + R.QI\right],$$
$$K = -R\sqrt{\frac{C}{L}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{CR^2}{4L}}}.$$

ÉQUATIONS RÉDUITES.

L'équation des mouvements amortis est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \gamma^2 x = 0.$$

Dans cette équation, β, correspondant à la force de viscosité, est toujours positif et le terme en α, provenant de l'énergie élastique qui, pour un coefficient d'inertie égal à l'unité, est représenté par

$$\frac{1}{2}\gamma^2 x^2,$$

est aussi un terme affecté d'un coefficient essentiellement positif que, pour cette raison, nous avons représenté par un carré γ^2.

Or, nous avons déjà indiqué l'allure des courbes qui donnent le

Digitized by Google

décrément logarithmique et la pseudo-période lorsque l'on faisait varier l'un des coefficients C, L ou R, mais ces courbes n'auraient pu être tracées rigoureusement que pour des valeurs particulières des autres constantes maintenues invariables. La représentation par des courbes exactes aurait été encore plus compliquée, si nous avions entrepris de représenter α en fonction du temps, car alors les conditions initiales auraient ajouté deux nouvelles constantes.

C'est pour tourner ces difficultés que l'on a recours aux équations réduites. En principe, toute loi physique s'exprime par une relation entre des nombres, qui sont les rapports de chaque grandeur physique à une grandeur physique de la même espèce prise pour unité. Le choix de l'unité est arbitraire, mais non indifférent.

Nous savons que l'équation du mouvement peut se mettre sous l'une des trois formes

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta\frac{d\alpha}{dt} + (\beta^2+\omega^2)\alpha = 0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta\frac{d\alpha}{dt} + \beta^2\alpha = 0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta\frac{d\alpha}{dt} + (\beta^2-\omega^2)\alpha = 0,$$

dont les solutions sont

$$\alpha = e^{-\beta t}\left(\alpha_0\cos\omega t + \frac{\alpha'_0+\beta\alpha_0}{\omega}\sin\omega t\right),$$

$$\alpha = e^{-\beta t}[\alpha_0 + (\alpha'_0+\beta\alpha_0)t],$$

$$\alpha = e^{-\beta t}\left(\alpha_0\operatorname{ch}\omega t + \frac{\alpha'_0+\beta\alpha_0}{\omega}\operatorname{sh}\omega t\right).$$

Or, la seconde de ces formules peut être considérée comme une formule de transition entre la première et la seconde, quand on fait tendre ω vers zéro; c'est ce dont on se rend compte immédiatement, d'après les formules

$$\lim\cos\omega t = 1, \qquad \lim\operatorname{ch}\omega t = 1 \quad \text{pour } \omega = 0;$$

$$\lim\frac{\sin\omega t}{\omega} = t, \qquad \lim\frac{\operatorname{sh}\omega t}{\omega} = t \quad \text{pour } \omega = 0.$$

Pour cette raison, nous dirons que la seconde formule est celle du mouvement critique.

Cela posé, je prends pour unité de temps la période $\frac{2\pi}{\gamma} = T_0$

Digitized by Google

qu'aurait le système si l'amortissement était nul, puis je pose

$$\beta_0 = \frac{\beta}{\gamma},$$

de sorte que β_0 sera égal à l'amortissement, celui-ci étant mesuré en prenant pour unité l'amortissement critique, car β_0 devient égal à 1 pour $\beta = \gamma$.

Je me borne maintenant au cas où l'on a $\alpha'_0 = 0$, et au mouvement périodique amorti.

Puis je fais le changement de variables

$$\alpha = \alpha_0 \xi \qquad \text{et} \qquad t = T_0 \tau,$$

et j'obtiens alors l'équation réduite du mouvement périodique amorti

$$\xi = e^{-2\pi\beta_0\tau}\left(\cos 2\pi\tau\sqrt{1-\beta_0^2} + \frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\sin 2\pi\tau\sqrt{1-\beta_0^2}\right).$$

On voit qu'il ne reste plus qu'un paramètre variable β_0, qu'il suffira de tracer exactement un seul faisceau de courbes, et que les calculs des physiciens seront alors réduits à un changement d'unités.

Dans le cas du mouvement apériodique, on aurait de même

$$\xi = e^{-2\beta_0\tau}\left(\operatorname{ch} 2\pi\tau\sqrt{1-\beta_0^2} + \frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\operatorname{sh} 2\pi\tau\sqrt{1-\beta_0^2}\right).$$

Dans le cas du mouvement périodique amorti, ω représentait la quantité $\frac{2\pi}{T}$, T étant la pseudo-période ; dans le cas du mouvement apériodique, le point figuratif ne tourne pas autour de l'origine dans le temps T, mais on voit aisément que le point $(\operatorname{ch}\omega t, \operatorname{sh}\omega t)$ est animé d'une vitesse aréolaire constante égale à $\frac{\omega}{2}$.

ÉTUDE DES DIVERSES CONSTANTES.

1° La pseudo-période τ_0 a pour expression

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}},$$

ce qui donne la courbe (A).

Digitized by Google

2° Le décrément logarithmique λ a pour expression

$$\lambda = 2\pi\beta_0\tau_0 = 2\pi\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}},$$

ce qui donne la courbe (B).

Fig. 17.

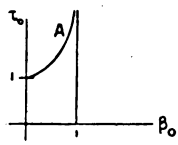
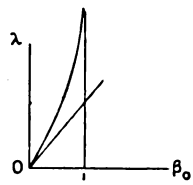


Fig. 18.



Le décrément r a pour expression

$$r = e^{2\pi\beta_0\tau_0} = e^{2\pi\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}} = e^{2\pi\tau_0\sqrt{1-\frac{1}{\tau_0^2}}} = e^{2\pi\sqrt{\tau_0^2-1}},$$

ce qui donne la courbe (C)

$$\tau_0^2 = 1 + \frac{1}{4\pi^2}\log^2 r,$$

Quand ξ prend une valeur donnée $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc., c'est que l'élongation est réduite à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc. de sa valeur initiale; on peut chercher, pour chaque valeur particulière que l'on attribue à ξ, comment le temps nécessaire, pour que l'élongation soit ainsi réduite à une fraction déterminée de sa valeur initiale, dépend de l'amortissement β_0.

On obtient ainsi le réseau (D).

Fig 19.

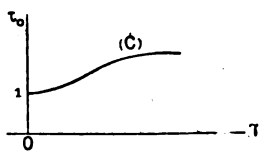
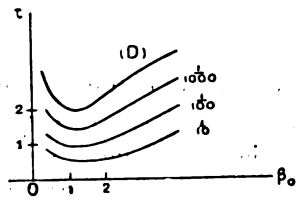


Fig. 20.

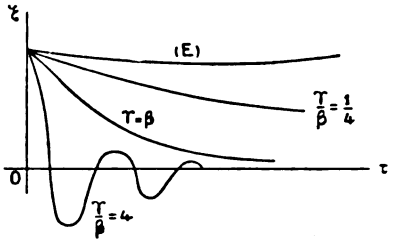


La constante γ caractérise l'élasticité; si donc nous conservons à β une même valeur numérique, et que nous tracions les courbes qui

Digitized by Google

donnent ξ en fonction de τ, pour diverses valeurs de $\frac{\gamma}{\beta}$, nous mettrons en évidence l'influence de l'élasticité. On obtient ainsi les courbes (E).

Fig. 21.



Dans le type d'équation différentielle que nous avons étudié, nous avions l'unité comme coefficient de $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$. Or ce terme représente la force d'inertie. Si donc on voulait étudier l'influence de l'inertie, il conviendrait de partir d'un type d'équation dans lequel on ferait égal à l'unité un des autres coefficients, par exemple l'équation

$$m\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\frac{d\alpha}{dt} + n\alpha = 0.$$

On aurait un nouveau système d'équations réduites.

Si maintenant l'on prend comme conditions initiales

$$\alpha = 0, \qquad \alpha' = \alpha'_0,$$

les équations du mouvement sont :

$$\alpha = \frac{\alpha'_0}{\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t, \tag{8}$$

$$\alpha = \alpha'_0 e^{-\beta t} t, \tag{9}$$

$$\alpha = \frac{\alpha'_0}{\omega} e^{-\beta t} \operatorname{sh} \omega t. \tag{10}$$

Les équations réduites seraient, dans ce cas, un peu plus simples que dans le cas spécialement étudié par Curie.

On remarquera que, dans le dernier cas (équation 10), la courbe de α, en fonction de t, part avec le coefficient angulaire à l'origine α'_0, atteint son maximum pour

$$t_1 = \frac{1}{2\omega} \log \frac{\omega + \beta}{\beta - \omega}$$

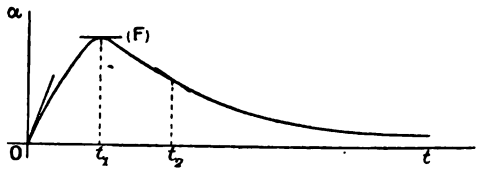
Digitized by Google

et qu'elle tend ensuite asymptotiquement vers l'axe des abscisses, après avoir subi inflexion pour l'époque t_2 double de t_1

$$t_2 = 2t_1,$$

ce qui donne la courbe (F).

Fig. 22.



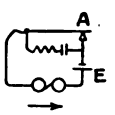
CHARGE DU CONDENSATEUR SOUS FORCE ÉLECTROMOTRICE CONSTANTE.

A l'époque $t = 0$, la force électromotrice constante E envoie un courant

$$i_0 = \frac{E}{R}$$

dans un récepteur. On ouvre alors la clé A qui intercale un condensateur C avec une résistance R_1 ; le condensateur se charge, puis, peu

Fig. 23.



à peu, après un régime variable qui dépend aussi du coefficient de self-induction de l'appareil, le courant i tend vers zéro.

A un instant quelconque, on a une charge q sur l'armature du condensateur qu'on rencontre en suivant le sens positif du circuit, et l'on a

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Cette armature se trouve à un potentiel v au-dessus de l'autre armature et l'on a

$$q = Cv.$$

Enfin la force électromotrice E est comptée positivement dans le sens où elle tendrait à accroître le courant. L'équation d'équilibre

Digitized by Google

entre les forces agissantes, les forces élastiques et d'inertie, et celle de viscosité donne

$$E - (R + R_1) i - L \frac{di}{dt} - v = 0.$$

Je pose

$$q - CE = x, \qquad \text{d'où} \qquad i = \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{di}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};$$

l'équation devient

$$L \frac{d^2x}{dt^2} + (R + R_1) \frac{dx}{dt} + \frac{x}{C} = 0.$$

Les conditions initiales sont

$$q = 0 \quad \text{ou} \quad x_0 = -CE, \qquad \text{et} \qquad \frac{dq}{dt} = i_0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = x'_0 = i_0.$$

La solution est donc

$$x = e^{-\beta t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} (\beta x_0 + x'_0) \sin \omega t \right],$$

avec

$$\beta = -\frac{R + R_1}{2L} \qquad \text{et} \qquad \omega^2 = \frac{1}{CL} - \frac{(R + R_1)^2}{4L^2}.$$

La différence de potentiel aux contacts V est

$$V = \frac{q}{C} + R_1 i = E + \frac{x}{C} + R_1 \frac{dx}{dt}.$$

Est-il possible d'avoir, quel que soit t, $V = E$?

On aurait, en ce cas,

$$\frac{x}{C} + R_1 \frac{dx}{dt} = 0$$

ou

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{CR_1}},$$

et l'équation différentielle, en x, se réduirait à

$$L \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} = 0$$

ou, en y substituant la valeur précédente de x,

$$\frac{L}{CR_1} - R = 0,$$

d'où

$$L = CRR_1.$$

Digitized by Google

On aurait, d'ailleurs,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\alpha_0}{CR_1} e^{-\frac{t}{CR_1}},$$

d'où, pour $t = 0$,

$$\alpha'_0 = i_0 = \frac{E}{R} = -\frac{\alpha_0}{CR_1} = \frac{CE}{CR_1},$$

d'où

$$R = R_1.$$

La réponse est donc affirmative et les conditions sont

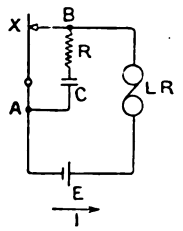
$$R = R_1 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Remarquons que, si ces conditions sont satisfaites, i sera toujours plus petit que i_0. On aura donc à la fois l'assurance que le voltage aux contacts de l'interrupteur ne dépassera pas E et que l'intensité ne dépassera pas $\frac{E}{R}$.

PROTECTION DES CONTACTS D'UN RELAIS (AUTRE MÉTHODE).

La pile (E) envoie un courant (I) dans l'électro (L, R) à travers le contact (X), qui est shunté par un condensateur de capacité (C),

Fig. 24.



ayant en tampon une résistance (R) égale à la résistance ohmique de l'électro. On demande quelle est, quand on ouvre le contact (X), la loi de variation du potentiel $V_B - V_A$ aux bornes du contact, si C est égal à $R^2 : L$. Démontrer que $V_B - V_A$ est constant et égal à E, force électromotrice de la pile.

Les conditions initiales que je note, par l'indice zéro, sont :

$$I_0 = \frac{E}{R}, \qquad Q_0 = 0$$

(Q étant la charge de C due à I).

Digitized by Google

Une fois le contact (X) ouvert, on a, dans le circuit qui subsiste

$$L\frac{dI}{dt} + 2RI + \frac{1}{C}Q = E.$$

Je suppose maintenant, expressément, que l'on ait $L = CR^2$, grâce à un choix convenable de C, et je pose

$$Q = q + CE, \qquad t = CR\theta,$$

l'équation devient

$$\frac{d^2q}{d\theta^2} + 2\frac{dq}{d\theta} + q = 0,$$

dont la solution est, en appelant M et N deux constantes arbitraires,

$$q = (M + N\theta)e^{-\theta};$$

d'où, en remplaçant $\frac{N}{CR}$ par la notation M',

$$Q = CE + (M + M't)e^{-\frac{t}{CR}},$$
$$I = \frac{dQ}{dt} = \left(M' - \frac{M}{CR} - \frac{M't}{CR}\right)e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Pour $t = 0$, nous avons

$$I_0 = \frac{E}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{E}{R} = M' - \frac{M}{CR},$$
$$Q_0 = 0 \quad \text{ou} \quad CE + M = 0;$$

d'où

$$M = -CE, \qquad M' = 0,$$

c'est-à-dire

$$Q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right),$$
$$I = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}};$$

d'où

$$V_B - V_A = RI + \frac{1}{C}Q = Ee^{-\frac{t}{CR}} + E\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) = E = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

ÉLECTROCINÉTIQUE ET MÉCANIQUE.

Je vais montrer qu'en suivant les filets ou tubes de courant à l'intérieur des conducteurs d'un réseau de Kirchhoff, on détermine des faisceaux de filets formant circuits fermés. Si l'on fait varier les intensités de ces faisceaux d'une façon arbitraire, les équations de Kirchhoff relatives aux nœuds ou sommets continuent à être satisfaites.

Le nombre de ces variables arbitraires, s'il y a n nœuds et l branches, est $l - n + 1$.

On peut prendre comme variables indépendantes des intensités fictives suivant le bord des mailles dont la juxtaposition constitue le réseau.

Les équations de Kirchhoff expriment que le principe des vitesses virtuelles est satisfait.

Ce principe, à son tour, permet d'écrire du premier coup les équations avec le nombre exact de variables indépendantes.

La forme des équations obtenues ainsi permet la démonstration facile de divers théorèmes de réciprocité.

Le même principe s'applique aisément au cas où l'on se donne les intensités injectées dans le réseau par les nœuds, au lieu de se donner les forces électromotrices situées dans les branches.

La considération de ces deux cas donne lieu à un certain dualisme.

Les équations de Lagrange s'appliquent aisément aux cas les plus généraux.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE L'ÉLECTRICITÉ EN RÉGIME PERMANENT.

L'électricité se comporte comme un fluide incompressible. Sa distribution dans les conducteurs est solénoïdale, c'est-à-dire qu'elle se fait par filets.

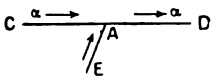
Digitized by Google

Considérons alors un réseau contenant des forces électromotrices constantes et parcouru par des courants constants. Ce réseau contient l branches reliant n sommets.

Je vais chercher quelles sont les intensités qui sont indépendantes des autres, en ne m'astreignant qu'à la condition de satisfaire à la loi de distribution par filets.

Considérons d'abord une branche (1) contenant une force électromotrice e_1. Je porte mon attention sur un filet qui traverse cette force électromotrice et je suis sa direction jusqu'au premier point d'embranchement ou sommet. En cet endroit, il se peut que quelques filets se séparent de lui; je l'accompagne dans la direction qu'il prend, et comme il ne peut s'arrêter nulle part, il faut qu'il revienne au pôle négatif de la force électromotrice e_1; il ne peut, en effet, se fermer

Fig. 25.



en un sommet A où il aurait déjà passé, puisque, s'il passait de C en D par le sommet A, il ne saurait en revenant par EA se fermer sur lui-même, le point A serait un terminus pour le filet venant suivant EA.

Appelons i_1 l'ensemble des intensités des filets qui suivent le même parcours que le filet considéré.

Si par la force électromotrice e_1 passent encore d'autres filets, choisissons-en un, il aura de même un parcours fermé et ce parcours sera différent de celui des filets i_1; j'appelle i_2 la somme des intensités des filets qui suivent ce nouveau parcours; admettons qu'il y ait encore d'autres filets d'intensité totale i_3 qui suivent un troisième parcours, et qui émanent de la source e_1.

S'il n'y a plus d'autres filets traversant e_1, deux cas peuvent se présenter : ou bien il n'y a pas d'autres forces électromotrices dans le réseau, ou bien il y a encore au moins une autre e_2.

S'il n'y a pas d'autre force électromotrice, je dis qu'il n'y a pas d'autres filets, car, en les suivant, on va toujours dans le sens des potentiels décroissants, et comme on ne traverse pas la force électromotrice e_1, on ne rencontre aucune force électromotrice; le potentiel décroîtrait donc indéfiniment si le filet pouvait se prolonger indéfiniment; or, d'une part, il ne peut se prolonger indéfiniment, et,

Digitized by Google

d'autre part, il ne saurait se fermer, puisqu'il faudrait revenir au potentiel initial, alors qu'on ne peut y remonter.

S'il y a une autre force électromotrice e_2, je trouverai encore des groupes de filets d'intensités j_1, j_2, j_3 traversant e_2 et ayant des parcours différents.

Si j'ai épuisé ainsi tous les filets qui traversent e_2 et s'il n'y a pas d'autre force électromotrice, il n'y a pas d'autres filets.

Mais s'il y a une autre force électromotrice e_3, j'examinerai si quelque filet traversant cette source n'a pas un parcours différent des filets antérieurement énumérés et je trouverai ainsi des groupes de filets à parcours distincts que j'appellerai k_1, k_2, k_3.

Supposons qu'il n'y ait pas d'autres filets.

Alors, si j'imagine que le filet i_1, par exemple, au lieu d'avoir une intensité i_1 ait une intensité i'_1, cela sera parfaitement compatible avec la loi de distribution par filets; il n'y aura pas plus qu'auparavant d'accumulation d'électricité aux sommets traversés sur le parcours considéré.

Il en résulte que les quantités

$$i_1, \quad i_2, \quad i_3, \quad j_1, \quad j_2, \quad j_3, \quad k_1, \quad k_2, \quad k_3$$

peuvent *a priori* avoir des valeurs quelconques. Ce sont des variables indépendantes au point de vue de la liaison imposée par les conditions relatives aux sommets correspondant aux équations de Kirchhoff

$$\Sigma i = 0.$$

NOMBRE DES VARIABLES INDÉPENDANTES.

Ayant trouvé un mode de décomposition des intensités en parties constitutives indépendantes, je vais montrer que ce nombre de parties est égal à $l - n + 1$.

En effet, s'il n'y a que deux sommets, A_1, A_2, il suffit de la diagonale A_1, A_2 pour faire un ensemble d'un seul tenant. Cherchons le nombre minimum de diagonales nécessaire pour faire un ensemble d'un seul tenant reliant n sommets $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Je dis que ce nombre est égal à $n - 1$. Je viens de le vérifier pour $n = 2$. Je dis que si la formule tient pour n sommets, elle s'applique encore au cas de $n+1$ sommets. Car, si le sommet A_{n+1} n'est pas relié à l'ensemble d'un seul tenant qui relie déjà $A_1, A_2, \ldots, A_n$, il suffit évidemment d'une seule diagonale nouvelle joignant A_{n+1} à l'un

Digitized by Google

quelconque des n autres sommets pour faire un ensemble d'un seul tenant. D'ailleurs, il est nécessaire de tracer au moins une diagonale nouvelle partant de A_{n+1}. Enfin, on ne saurait en mener deux distinctes sans constituer aussitôt un circuit fermé.

Ainsi $n-1$ diagonales suffisent pour faire un ensemble d'un seul tenant et avec n diagonales il y a alors un circuit fermé.

Je dis que le nombre des parcours fermés distincts est égal à $l-n+1$.

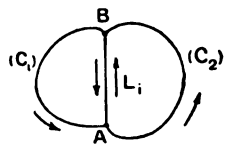
Je viens de vérifier cette formule pour le cas de $l=n$.

Or, chaque fois que j'ajoute une nouvelle diagonale, j'ajoute un circuit fermé et je n'en ajoute qu'un.

En ajoutant une nouvelle diagonale à un système qui est déjà d'un seul tenant, j'autorise au moins un nouveau parcours distinct, puisque j'autorise un parcours contenant cette nouvelle branche L_i.

D'ailleurs, je n'autorise pas deux circuits nouveaux distincts. Car soient C_1 et C_2, deux parcours nouveaux passant par L_i, alors en parcourant C_2 dans un sens tel que je suive L_i en sens inverse du sens dans lequel je le suivais en parcourant C_1, je puis remplacer le parcours $(C_1)+(C_2)$ par le parcours fermé comprenant les parties de (C_1) et de (C_2) qui ne contiennent pas L_i. Or ce nouveau parcours ne contenant pas L_i et s'effectuant dans l'ensemble d'un seul tenant

Fig. 26.



qui existait avant l'adjonction de cette diagonale est réductible aux parcours indépendants antérieurement considérés. Donc (C_2) se réduit à $-(C_1)$ plus d'autres parcours déjà considérés; il ne constitue pas un nouveau parcours indépendant.

Ainsi donc chaque diagonale nouvelle amène un circuit indépendant nouveau et un seul.

Il résulte de cette démonstration même que nous considérons comme nul le parcours AB suivi du parcours BA.

Ainsi le nombre des parcours distincts sera égal à $l-n+1$.

Par exemple, dans le diagramme du pont de Wheatstone, nous avons 6 diagonales, 4 sommets.

Digitized by Google

Donc le nombre d'intensités linéairement indépendantes est de $6 - 4 + 1 = 3$.

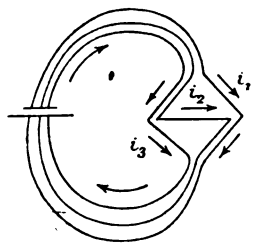
Le pont de Wheatstone donnera donc à résoudre un système de trois équations à trois inconnues.

Il y a une très grande latitude dans le choix des inconnues.

En particulier, si nous admettons qu'il n'y ait qu'une seule force électromotrice e_1, située dans la branche (1), nous pourrons, par la méthode que nous avons indiquée plus haut, prendre comme intensités de filets indépendantes les intensités de filets correspondant à des parcours qui empruntent tous la branche (1). Le courant total dans une branche quelconque sera une somme algébrique, en général, des intensités de filets que l'on aura choisis comme variables indépendantes; mais dans le cas où l'on a fait la décomposition avec une seule force électromotrice, tous les filets sont de même sens, étant donnée la nécessité de suivre le sens des potentiels décroissants et par suite le courant total d'une branche sera une somme véritable des intensités de filets.

Le diagramme ci-joint se rapporte au pont de Wheatstone et l'on voit, en effet, comment on peut obtenir des intensités i_1, i_2, i_3 com-

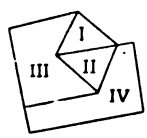
Fig. 27.



posantes, toutes de même sens, dans les branches qui leur sont communes.

On peut donner le nom de maille à chaque parcours indépendant;

Fig. 28.



en particulier, si le diagramme peut être appliqué sur un plan de

Digitized by Google

façon à former des mailles I, II, III, IV qui ne se recouvrent pas, on pourra affecter une intensité à chaque maille bordant une région I, II, III ou IV et ces intensités de mailles seront indépendantes.

ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS.

Je considère un réseau et j'appelle H la puissance calorifique, W la puissance des sources. J'aurai

$$H = \Sigma RI^2, \tag{1}$$

$$W = \Sigma EI. \tag{2}$$

Or, si je considère la résistance R, la chaleur dissipée par le passage de la quantité virtuelle d'électricité δQ serait

$$RI^2\,dt = RI.I\,dt = RI.\delta Q.$$

Cette quantité de chaleur représente donc le travail de la force généralisée RI le long du déplacement virtuel δQ.

De même le travail élémentaire de la force électromotrice E, quand il y passe la quantité virtuelle d'électricité δQ, est $E\delta Q$.

Par suite, s'il n'y a pas d'autre énergie que celle des sources intérieures et s'il n'y a pas d'autre cause de dissipation d'énergie que le dégagement de chaleur, conformément à la loi de Joule, j'aurai, par application du principe des vitesses virtuelles,

$$\Sigma(E - RI)\,\delta Q = 0, \tag{3}$$

la sommation étant étendue à toutes les branches du réseau.

Mais ces diverses branches sont parcourues par des intensités qui ne sont pas indépendantes, étant soumises comme elles le sont aux équations de liaison

$$\Sigma I = 0, \tag{4}$$

applicables à chaque sommet ou nœud du diagramme.

Nous avons vu que les courants pouvaient être partagés en filets indépendants au nombre de $l - n + 1$; on peut faire varier leurs intensités sans que les équations aux sommets cessent d'être vérifiées.

En intégrant de 0 à t les équations (4) et supposant qu'aucune quantité d'électricité initiale ne charge les sommets, nous aurons les équations

$$\Sigma Q = 0, \tag{4 bis}$$

Digitized by Google

en même nombre et de même forme que les équations (4) et de même que les intensités I étaient exprimables en fonction linéaire de $l - n + 1$ d'entre elles, que j'appellerai q'_1, q'_2, etc., les quantités Q seront exprimables de la même façon, exactement, en fonction des $l - n + 1$ variables correspondantes q_1, q_2, etc.

Si, dès lors je suppose que la variable q correspond à un certain parcours fermé, à l'un de nos filets fondamentaux par exemple, et si je lui donne la variation δq pendant que tous les autres filets conserveront leurs intensités invariables, les différentes variations δQ se réduiront à δq sur le parcours du filet considéré et à zéro pour toutes les autres branches. On aura donc, en supprimant le facteur δq, l'équation

$$\Sigma(E - RI) = 0. \tag{5}$$

Mais celle-ci ne comprendra que les forces électromotrices et les intensités rencontrées le long d'un certain parcours fermé. On obtient ainsi les équations de Kirchhoff, puisque n'importe quel parcours fermé résulte de la combinaison par addition algébrique des parcours fermés fondamentaux.

ÉQUATIONS EXPRIMÉES EN FONCTION DE LA PUISSANCE CALORIFIQUE.

Je vais donner une autre expression de l'équation (3) du travail virtuel, en faisant un changement de variables.

Supposons que j'aie trois branches et deux parcours indépendants; je pourrais poser

$$\begin{cases} I_1 = a_1 q'_1 + b_1 q'_2, \\ I_2 = a_2 q'_1 + b_2 q'_2, \\ I_3 = a_3 q'_1 + b_2 q'_2, \end{cases} \tag{6}$$

et je poserais aussi

$$\begin{cases} Q_1 = a_1 q_1 + b_1 q_2, \\ Q_2 = a_2 q_1 + b_2 q_2, \\ Q_3 = a_3 q_1 + b_3 q_2. \end{cases} \tag{7}$$

Je considérerai q'_1 et q'_2 comme égaux à $\frac{dq_1}{dt}$ et $\frac{dq_2}{dt}$; de sorte que j'aurai aussi

$$I_1 = \frac{dQ_1}{dt}, \qquad I_2 = \frac{dQ_2}{dt}, \qquad I_3 = \frac{dQ_3}{dt}.$$

Par suite Q_1, Q_2, Q_3 peuvent être considérées comme les quantités

Digitized by Google

d'électricité qui ont circulé dans les diverses branches depuis l'origine des temps.

Cela posé, j'aurai, par application de la règle des fonctions de fonctions :

$$\frac{\partial H}{\partial q'_1} = \frac{\partial H}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial q'_1} + \frac{\partial H}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial q'_1} + \frac{\partial H}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial q'_1},$$
$$\frac{\partial H}{\partial q'_2} = \frac{\partial H}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial q'_2} + \frac{\partial H}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial q'_2} + \frac{\partial H}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial q'_2}$$

ou

$$\frac{\partial H}{\partial q'_1} = a_1\frac{\partial H}{\partial I_1} + a_2\frac{\partial H}{\partial I_2} + a_3\frac{\partial H}{\partial I_3},$$
$$\frac{\partial H}{\partial q'_1} = b_1\frac{\partial H}{\partial I_1} + b_2\frac{\partial H}{\partial I_2} + b_3\frac{\partial H}{\partial I_3}$$

et, par suite,

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q'_1}\delta q_1 + \frac{\partial H}{\partial q'_2}\delta q_2 = \sum \frac{\partial H}{\partial I_1}(a_1\delta q_1 + b_1\delta q_2) \tag{8}$$
$$= \sum \frac{\partial H}{\partial I_1}\delta Q_1 = \sum 2\,RI\,\delta Q.$$

J'aurai de même

$$\delta W = \sum E\,\delta Q = \sum \frac{\partial W}{\partial q}\delta q = \sum e\,\delta q. \tag{9}$$

L'équation (3) peut donc s'écrire

$$\frac{1}{2}\delta H - \delta W = 0, \tag{10}$$

d'où les $l - n + 1$ équations

$$e = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial q'}. \tag{11}$$

FORMULES RÉCIPROQUES.

Si, au lieu de considérer les forces électromotrices comme données et de chercher à en déduire les q', ce qui est rendu possible par les équations (11), je considère au contraire les q' comme donnés et que je cherche à en déduire les forces électromotrices correspondantes, il est facile de trouver le système réciproque du système (11).

Soit H'_q l'expression de H en fonction des q' et faisons-y la substitution (11) de façon à exprimer H en fonction des quantités e; grâce à la résolution des équations (11), je puis, dans H, remplacer chaque q' en fonction des e.

Digitized by Google

J'appelle H_e l'expression de H en fonction des e.

J'aurai, d'après les équations (11),

$$\delta e_i = \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial q'_i\,\partial q'_k}\,\delta q'_k, \tag{12}$$

d'où

$$\sum_i q'_i\,\delta e_i = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial q'_i\,\partial q'_k}\,q'_i\,\delta q'_k \tag{13}$$

ou, en intervertissant l'ordre de sommation,

$$\sum q'_i\,\delta e_i = \frac{1}{2}\sum_k \left(\delta q'_k \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial q'_i\,\partial q'_k}\,q'_i\right). \tag{14}$$

Or H est du second degré et homogène, donc $\frac{dH}{dq'_k}$ est du premier degré et homogène.

On a donc

$$\sum q'_i \frac{\partial}{\partial q'_i}\left(\frac{\partial H}{\partial q'_k}\right) = \frac{\partial H}{\partial q'_k} \tag{15}$$

et (14) devient

$$\sum q'_i\,\delta e_i = \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial H}{\partial q'_k}\,\delta q'_k = \sum e_k\,\delta q'_k. \tag{16}$$

D'autre part, j'ai

$$\delta H_e = \sum \frac{\partial H_e}{\partial e}\,\delta e, \tag{17}$$

donc, d'après (16),

$$\sum q'_i\,\delta e_i = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial H_{q'}}{\partial q'_k}\,\delta q'_k = \frac{1}{2}\,\delta H = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial H_e}{\partial e_i}\,\delta e_i, \tag{18}$$

et comme les δe sont indépendants, il reste

$$q'_i = \frac{1}{2}\,\frac{\partial H_e}{\partial e_i}. \tag{19}$$

Les équations (11) et (19) peuvent être considérées comme exprimant une loi de réciprocité.

Plus généralement, si l'on exprime que le travail des sources se retrouve sous forme de chaleur, on a

$$\sum eq' = H,$$

Digitized by Google

par conséquent

$$\sum e\,\delta q' + \sum q'\,\delta e = \delta H = \frac{1}{2}\delta(H_e + H_{q'}),$$

$$\delta H_e = \sum \frac{\partial H_e}{\partial e}\,\delta e, \qquad \delta H_{q'} = \sum \frac{\partial H}{\partial q'}\,\delta q';$$

d'où

$$\sum e\,\delta q' + \sum q'\,\delta e = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial H_e}{\partial e}\,\delta e + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial H_{q'}}{\partial q'}\,\delta q'.$$

Si donc on donne n_1 quantités e et n_2 quantités q' de façon que $n_1 + n_2 = l - n + 1$, et si l'on détermine les autres quantités e et q' par les n_1 équations,

$$e_i = \sum \frac{1}{2}\frac{\partial H_{q'}}{\partial q'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1),$$

et par les n_2 équations,

$$q'_j = \sum \frac{1}{2}\frac{\partial H_e}{\partial e} \qquad (j = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2),$$

les variations restantes seront arbitraires et l'on aura

$$e_{i'} = \sum \frac{1}{2}\frac{\partial H_{q'}}{\partial q'} \qquad (i' = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2),$$

$$q'_{j'} = \sum \frac{1}{2}\frac{\partial H_e}{\partial e} \qquad (j' = 1, 2, \ldots, n_1).$$

Ce cas est celui où l'on se donnerait la valeur des forces électromotrices dans certaines branches et la valeur de l'intensité dans certaines autres.

ALIMENTATION A COURANT CONSTANT.

Je viens d'examiner le cas où le réseau est pourvu de forces électromotrices E constantes dans les différentes branches. Supposons maintenant qu'il n'y ait point à l'intérieur de force électromotrice, mais que par les n sommets il entre des intensités $J_1, J_2, \ldots, J_n$, satisfaisant à la condition $J_1 + J_2 + \ldots + J_n = 0$.

On satisfera identiquement à cette condition si l'on suppose qu'aux deux extrémités A et B d'une branche quelconque AB, il entre un courant I par A et qu'il en sorte un $-I$ par B. On aura alors un nombre de variables I surabondantes pour exprimer que chaque sommet reçoit au total le courant J_1, J_2 et J_n respectivement. Alors à

Digitized by Google

chaque branche sera affectée une intensité I_1, par suite la loi relative à un sommet quelconque s'écrira

$$\sum\left(\frac{V}{R}-I\right)=0, \tag{1}$$

la somme étant étendue aux diverses branches qui aboutissent à ce sommet, V étant la différence de potentiel le long de la branche et R sa résistance.

D'autre part, le long d'un parcours fermé quelconque on aura

$$\sum V=0, \tag{2}$$

la somme étant étendue aux diverses branches qui constituent le circuit.

Au moyen des $l-n+1$ équations (2), je peux déterminer les valeurs de $l-n+1$ quantités V en fonction des $n-1$ autres qui resteront arbitraires et en reportant ces valeurs dans les équations (1) où les I sont des quantités données, je déterminerai les $n-1$ V dont les autres dépendent.

Si l'équation (1) se rapporte au sommet j, elle aura la forme

$$\sum\left(\frac{V_{jk}}{R_{jk}}-I_{jk}\right)=0, \tag{3}$$

la sommation étant étendue aux branches qui aboutissent au sommet j. Je puis prendre d'ailleurs pour variables indépendantes les valeurs v du potentiel en $n-1$ sommets, la valeur du potentiel au dernier sommet étant évidemment arbitraire et prise, si l'on veut, égale à zéro.

Faisons varier les V en observant les équations (2), nous aurons

$$\sum\delta V=0, \tag{4}$$

pour chaque circuit fermé. Les δV s'exprimeront en fonction des δv comme les V en fonction des v.

Les équations (3) donneront alors

$$\sum_j\left[\delta v_j\sum\left(\frac{V_{jk}}{R_{jk}}-I_{jk}\right)\right]=0. \tag{5}$$

δv_j étant la variation virtuelle de potentiel du sommet numéroté j

Digitized by Google

Mais cette équation peut s'écrire

$$\sum \left(\frac{V_{jk}}{R_{jk}} - I_{jk} \right) \delta V_{jk} = 0, \tag{6}$$

car on a

$$V_{jk} = v_j - v_k$$

et par suite, on peut réunir les termes deux par deux, savoir :

$$I_{jk}\,\delta v_j + I_{kj}\,\delta v_k = I_{jk}\,\delta V_{jk},$$
$$V_{jk}\,\delta v_j + V_{kj}\,\delta v_k = V_{jk}\,\delta V_{jk}.$$

Mais si je pose

$$H_v = \sum \frac{V^2}{R}, \tag{7}$$

j'aurai

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H_v}{\partial V} = \frac{V}{R}, \qquad \sum \frac{1}{2}\frac{\partial H_v}{\partial V}\delta V = \sum \frac{V\,\delta V}{R} = \frac{1}{2}\delta H_v,$$

et

$$\delta H_v = \sum \frac{\partial H}{\partial v}\delta v.$$

D'autre part, je puis écrire, en réunissant les intensités qui aboutissent à chaque sommet

$$\sum I_{jk}\,\delta V_{jk} = \sum_{r=1}^{r=n-1} J_r\,\delta v_r, \tag{8}$$

alors l'équation (6) prendra la forme

$$\sum \left(\frac{1}{2}\frac{\partial H_v}{\partial v_r} - J_r \right) \delta v_r = 0,$$

et, comme les δv_r sont indépendants, elle se décompose en $n-1$ équations :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H_v}{\partial v_r} - J_r = 0, \tag{9}$$

qui détermineront les $n-1$ potentiels de sommets. On en déduira aussitôt les valeurs des différences de potentiels des diverses branches et par suite la répartition des courants.

DUALISME ENTRE DEUX RÉSEAUX DIFFÉRENTS.

Considérons maintenant un réseau quelconque.

S'il est constitué de deux parties d'un seul tenant, qui ne sont

Digitized by Google

reliées que par une branche, aucun circuit fermé ne peut emprunter cette branche; elle ne sera donc parcourue par aucun courant. Elle établira seulement l'égalité de potentiel entre les deux points qu'elle réunit, si dans cette branche ne figure aucune force électromotrice. Dans le cas contraire, elle établira entre ces deux points une différence de potentiel égale à la force électromotrice incluse.

En supprimant cette branche parasite, le système est décomposé en deux parties indépendantes.

Considérons un réseau (A) sans branches parasites.

Soit I le courant dans une branche quelconque, R la résistance, E la force électromotrice. Les équations de Kirchhoff sont :

1° pour les sommets

$$\sum \mathrm{I} = 0; \tag{1}$$

2° pour les parcours fermés

$$\sum (\mathrm{E} - \mathrm{RI}) = 0. \tag{2}$$

Les équations (1) sont au nombre de $n - 1$ distinctes, les équations (2) sont au nombre de $l - n + 1$ distinctes. Leur ensemble forme l équations qui détermineront les l intensités des branches.

Inversement, supposons qu'un réseau (A′) ne contienne aucune force électromotrice, mais que par chacun des n' sommets il reçoive les intensités $J_1, J_2, \ldots, Jn'$, dont la somme doit être égale à zéro, puisqu'il ne peut y avoir d'accumulation d'électricité dans le réseau.

Nous avons dans chaque branche du réseau une différence de potentiel V entre les deux extrémités, et par suite on peut écrire $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}$. Les $n' - 1$ équations distinctes des sommets deviendront alors

$$\sum \left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}} - \mathrm{J}\right) = 0, \tag{1'}$$

la somme étant étendue à un ou plusieurs sommets.

D'autre part, pour chaque circuit fermé, on a, dès que l'on revient au point de départ, une variation totale de potentiel égale à zéro, d'où les $(l' - n' + 1)$ équations distinctes :

$$\sum \mathrm{V} = 0. \tag{2'}$$

Les équations (1′) étant au nombre de $n' - 1$, et les équations (2′)

Digitized by Google

sont au nombre de $l' - n' + 1$; on pourra déterminer ainsi les l' différences de potentiels V.

Considérons le système (A) auquel s'appliquent les équations (1) et (2) et le système (A') auquel s'appliquent les équations (2') et (1'). La substitution

$$\begin{pmatrix} E & I & R \\ J & V & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

change les équations (1) en (2') et (2) en (1'), et si l'on a

$$n + n' = l + 2 = l' + 2,$$

on aura

$$n - 1 = l' - n' + 1,$$
$$l - n + 1 = n' - 1,$$

de sorte que les équations (1) et (2') sont en même nombre, de même que les équations (2) et (1'). Ces deux systèmes permettront de déterminer soit les l inconnues I, soit les $l' = l$ inconnues V.

Il y a donc dualité entre les deux réseaux A et A'.

On peut remarquer que les nombres l et n relatifs au pont de Wheatstone sont tels qu'il peut être considéré comme se correspondant à lui-même.

Lorsque l est pair, on peut faire $n = n'$ étant les équations (3), et l'on a alors un système qui se correspond à lui-même.

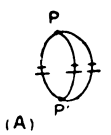
Mais deux systèmes différents se correspondront pourvu qu'ayant même nombre de branches, les nombres de leurs sommets soient complémentaires par rapport à $l + 2$.

C'est ce qui a lieu dans les diagrammes ci-après où l'on aura

$$\begin{matrix} n = 2 \\ n' = 3 \end{matrix} \qquad l = 3 = l'$$
$$n + n' = 5 = l + 2.$$

Dans le système (A) nous n'avons que deux circuits indépendants,

Fig. 29.

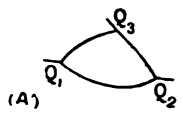


de sorte que les forces électromotrices indépendantes sont $E_1 - E_2$,

Digitized by Google

$E_2 - E_3$ et non les forces électromotrices E_1, E_2, E_3 de chaque branche. De même, dans la figure A', les intensités j_1, j_2, j_3

Fig. 30.



fournies aux sommets ne sont pas indépendantes, puisque l'on a $j_1 + j_2 + j_3 = 0$, aussi pourra-t-on remplacer j_1, j_2, j_3 par les valeurs $J_2 - J_3$, $J_3 - J_1$, $J_1 - J_2$ qui satisfont d'elles-mêmes à la condition d'avoir une somme nulle, alors les équations du système (A) sont

$$E_1 - R_1 I_1 = E_2 - R_2 I_2 = E_3 - R_3 I_3,$$
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

et celles du système (A') seront

$$J_1 - \frac{V_1}{R_1} = J_2 - \frac{V_2}{R_2} = J_3 - \frac{V_3}{R_3},$$
$$V_1 + V_2 + V_3 = 0.$$

La réciprocité se trouve ici explicitée.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DE L'ÉLECTRICITÉ.

Conformément aux idées de Maxwell, je me bornerai à écrire les équations de Lagrange.

Pour les écrire, il faut avoir les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Si q est une des variables généralisées qui définissent l'état du système, charge d'un corps conducteur ou quantité d'électricité qui a passé dans une branche depuis l'origine des temps, les intensités sont les dérivées par rapport au temps des quantités q; l'énergie cinétique n'est autre que l'énergie magnétique et l'énergie potentielle n'est autre que l'énergie électrique. Il y a lieu enfin de tenir compte de la résistance du milieu dans les conducteurs, ce qui se fait en considérant la différence de potentiel Rq' comme une force de viscosité.

Cela étant, T étant l'énergie magnétique, on aura

$$2T = A_{11} q_1'^2 + 2 A_{12} q_1' q_2' + \ldots,$$

les quantités A_{11}, A_{12}, etc., étant les coefficients de self-induction ou d'induction mutuelle.

Digitized by Google

Ce qu'il y a lieu de remarquer tout d'abord, c'est que ces coefficients sont indépendants des variables q.

De même, W étant l'énergie électrique, on aura

$$2W = B_{11}q_1^2 + 2B_{12}q_1q_2 + \dots,$$

les coefficients B′ étant ceux qui s'introduisent dans la théorie des conducteurs placés dans le milieu diélectrique sous leur influence réciproque.

Ces coefficients dépendent de la configuration et de la position des conducteurs sur lesquels sont réparties les charges q_1, q_2, etc.

Les variables q et q' ne sont pas toutes indépendantes. Par exemple, si une enveloppe métallique contient deux conducteurs qui ne communiquent avec l'extérieur que par des fils fins isolés, la somme des charges des deux conducteurs et de la charge interne de l'enveloppe sera égale à zéro, de sorte que la propriété de la conservation du flux d'induction électrique à travers les milieux diélectriques non électrisés impose une liaison. Je supposerai désormais que l'on a tenu compte de toutes ces équations de condition et que les variables q qui figurent dans W sont des variables indépendantes.

De même, nous savons que les conditions de Kirchhoff relatives aux sommets d'un réseau imposent des liaisons aux intensités qui y aboutissent; c'est la conséquence de l'équation de continuité. La distribution des courants est, elle aussi, solénoïdale. Je supposerai désormais que l'on ait utilisé toutes ces relations pour ne conserver que les quantités q' qui sont indépendantes, dans l'expression de T.

On a, par exemple,

$$\delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial Q'}\delta Q'.$$

On aura, après le changement de variables,

$$\delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial q'}\delta q'.$$

Alors, les quantités de mouvement seront de la forme

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1 = A_{11}q'_1 + A_{12}q'_2 + \dots.$$

On a de même pour l'énergie électrique

$$\delta W = \sum \frac{\partial W}{\partial Q}\delta Q,$$

Digitized by Google

et après le changement de variables, il vient

$$\delta W = \sum \frac{\partial W}{\partial q}\,\delta q,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = v_1 = B_{11} q_1 + B_{12} q_2 + \ldots.$$

L'énergie $\delta\mathfrak{E}$ fournie au système par les sources E, est

$$\delta\mathfrak{E} = \sum E\,\delta Q;$$

Après le changement de variables, on a

$$\delta\mathfrak{E} = \sum e\,\delta q,$$

et cette équation, jointe à la précédente, permet de déterminer les quantités e en fonction des quantités E.

Cela posé, les équations de Lagrange sont de la forme :

$$\frac{dp_1}{dt} - \frac{dT}{dq_1} + \frac{dW}{dq_1} = Q_1 \qquad (Q_1 \text{ force généralisée}).$$

Elles nous donneront ici

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dW}{dq} = e_q - \frac{1}{2}\frac{dJ}{dq'}. \tag{I}$$

J désignant la puissance calorifique du système, c'est-à-dire qu'on a

$$J = \sum RQ'^2,$$

quantité qui, par le changement de variables, devient une fonction quadratique des q'.

Les équations (I) sont les équations générales du mouvement de l'électricité.

Dans le régulateur à boule, l'énergie cinétique est fonction non seulement des vitesses, mais encore de l'écart angulaire θ des bras, aussi les termes en $\frac{dT}{dq}$ ne sont-ils pas nuls, en général, en mécanique rationnelle. Nous avons donc en électricité une simplification appréciable, le potentiel électrodynamique T ne dépendant que de la valeur actuelle des courants et point du tout de la quantité totale d'électricité qui a traversé leur section depuis l'origine des temps.

Digitized by Google

CHAPITRE X.

PUISSANCE ACTIVE ET PUISSANCE RÉACTIVE.

Je vais donner ci-après la démonstration de plusieurs théorèmes concernant la puissance réelle et la puissance réactive.

Il s'agit d'un réseau parcouru par des courants alternatifs de période bien définie (pulsation ω) en régime permanent, comme le cas se présente en particulier dans un réseau de distribution d'énergie électrique.

Le théorème de M. Boucherot montre que la somme des puissances réelles est toujours nulle et qu'il en est de même de la somme des puissances réactives.

Les puissances réelles comprennent les puissances fournies par les générateurs, d'une part, et les puissances absorbées, d'autre part, par les appareils récepteurs; à ce point de vue, une ligne qui est le siège d'un dégagement de chaleur fait partie des appareils qui absorbent de la puissance électrique et la restituent sous forme calorifique.

La partie du théorème qui concerne les puissances réelles se confond avec l'application du principe de la conservation de l'énergie.

Il est intéressant de voir que la puissance réactive est soumise, elle aussi, à une loi de conservation.

M. Langevin a donné une belle démonstration de ces propositions.

La démonstration que je donne ci-après est une application du calcul vectoriel.

Les quantités périodiques sont représentées comme des vecteurs coplanaires, et l'on envisage implicitement un système de référence trirectangulaire. Les deux premiers axes seront dans le plan du diagramme vectoriel.

Après avoir étudié le théorème de Boucherot, je passerai au cas où l'on envisage non les différences de potentiel entre les divers nœuds, mais les forces électromotrices.

Digitized by Google

En ce cas, le principe de la conservation de l'énergie indique que la puissance fournie en moyenne par les sources est égale à la puissance absorbée en moyenne dans les récepteurs augmentée de l'énergie dissipée par seconde sous forme de chaleur de Joule.

On peut, pour ces forces électromotrices, qui sont des réservoirs fournissant ou recevant de l'énergie, observer aussi la puissance réactive, et l'on trouve que cette puissance réactive est proportionnelle à la différence des énergies présentes en moyenne sous forme magnétique et sous forme électrostatique ou, si l'on veut, dans les bobines d'une part, et dans les condensateurs d'autre part.

Pour effectuer facilement cette démonstration, je montre que la façon la plus simple de mettre en équations le mouvement de l'électricité dans un système de réseau, aussi général qu'on puisse le concevoir, consiste à appliquer les équations de Lagrange.

Il est, en effet, très facile en général d'avoir les expressions de l'énergie électrostatique, de l'énergie électromagnétique et de la chaleur de Joule.

Les équations de Lagrange, ne faisant intervenir que les énergies et les forces appliquées, sont généralement formées très aisément.

Dans l'application au cas de variations de pulsation ω, après que le régime permanent est établi, j'utilise encore la notation vectorielle.

Cette notation, quand il s'agit de puissances, est plus commode que celle des imaginaires, qui nécessite certaines précautions qui ont été indiquées par M. Janet.

Les deux méthodes sont distinctes et ne peuvent être ramenées l'une à l'autre. Dans les imaginaires, en effet, le produit de deux quantités est indépendant de l'ordre des facteurs. Dans le cas du calcul vectoriel, au contraire, le produit vectoriel de deux vecteurs change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs.

THEORÈME DE BOUCHEROT.

Dans un réseau *à* courant alternatif, la somme des puissances réactives est nulle comme la somme des puissances réelles.

Soit un réseau comportant un certain nombre d'appareils (alternateurs, lignes, transformateurs, moteurs, etc.), avec bornes, desquels les différences de potentiel efficaces sont

$$U_1 U_2 U_3 \dots U_n$$

Digitized by Google

décalées d'angles $\psi_1, \psi_2 \ldots, \psi_n$ par rapport à une origine quelconque. Soient

$$I_1 I_2 I_3 \ldots I_n,$$

les courants qui traversent ces divers appareils,

$$\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n,$$

les angles que font ces courants avec les différences de potentiel correspondantes.

La puissance réelle absorbée par un de ces appareils est

$$P_a = U_n I_n \cos\varphi_n,$$

et la puissance réactive absorbée par le même appareil est

$$P_r = U_n I_n \sin\varphi_n.$$

Je dis que l'on a

$$(I). \quad \begin{cases} \Sigma U_n I_n \cos\varphi_n = 0 & \text{ou} \quad \Sigma P_a = 0, \\ \Sigma U_n I_n \sin\varphi_n = 0 & \text{ou} \quad \Sigma P_r = 0. \end{cases}$$

Tout d'abord, nous modifierons les notations pour les rendre plus symétriques.

Je considérerai un système de n nœuds $A_1, A_2 \ldots, A_n$ et j'appellerai $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les potentiels instantanés en ces points. Si, par exemple, A_1 et A_2 sont les bornes entre lesquelles la différence de potentiel efficace est U_1, j'aurai

$$(v_2 - v_1)_{\text{eff}} = U_1,$$

et de même pour les autres grandeurs analogues.

J'appellerai i_{pq} l'intensité du courant dans la branche A_p, A_q, comptée positivement de p vers q, de sorte que j'aurai

$$i_{pq} = -i_{qp}.$$

Si i_{12} est le courant qui passe dans l'appareil (1) branché aux deux bornes, dont la différence de potentiel est U_1, j'aurai

$$(i_{12})_{\text{eff}} = I_1,$$

et j'aurai des relations analogues pour les grandeurs similaires.

Les intensités et les différences de potentiel peuvent être représentées par des vecteurs coplanaires, dans le plan de yox; ces vecteurs auront pour grandeurs la valeur efficace des quantités phy-

Digitized by Google

siques correspondantes, et pour direction la direction qui fait avec ox un angle égal à leurs angles de phase.

Enfin, les valeurs instantanées étant désignées par de petites lettres, les vecteurs seront représentés par de grandes lettres.

Dans ces conditions, I_{pq} sera le vecteur représentatif de i_{pq}, et V_p le vecteur représentatif de v_p.

Or, le premier lemme de Kirchhoff donne pour le sommet A_p

$$\sum_q i_{pq} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n).$$

A cette équation, l'on pourra substituer l'équation géométrique

$$\sum_q I_{pq} = 0, \qquad (n \text{ équations}).$$

Faisons les produits géométriques intérieurs et extérieurs, en considérant les vecteurs comme rapportés à un trièdre trirectangle $(oxyz)$, de chacun des premiers membres de ces équations par le potentiel V_p du sommet correspondant, et additionnons les résultats, il vient

$$\sum_p (V_p \Sigma I_{pq}) = 0, \qquad \sum_p [V_p \Sigma I_{pq}] = 0.$$

Dans ces équations, les parenthèses ont le sens qu'on leur donne dans la notation vectorielle. En vertu de la propriété distributive, on peut effectuer les produits. Les termes en I_{pq} sont au nombre de deux et donnent, respectivement dans chacune des deux sommes

$$(V_p I_{pq}) + (V_q I_{qp}) = (I_{pq}, V_p - V_q) = (I_{pq}, U_{pq}),$$
$$[V_p I_{pq}] + [V_q I_{qp}] = [V_p - V_q, I_{pq}] = [U_{pq}, I_{pq}] = 0,$$

d'où

$$\Sigma((I_{pq} U_{pq})) = 0, \qquad \Sigma([I_{pq} U_{pq}]) = 0.$$

Ces équations, traduites en langage algébrique, donnent les équations (I).

ÉQUATIONS DE LAGRANGE. RÉGIME PÉRIODIQUE PERMANENT.

1° Je suppose que toutes les forces électromotrices sont de la forme

$$(1) \qquad e = \sqrt{2}\, e_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi) \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right),$$

Digitized by Google

la pulsation ω ayant la même valeur pour toutes. Dans ces conditions, je dis qu'il y a une solution dans laquelle toutes les inconnues, telles que q, sont de la forme

$$q = \sqrt{2}\, q_{\text{eff}} \sin(\omega t + \psi), \tag{2}$$

les q_{eff} et ψ étant des quantités qu'il est possible de déterminer de façon à satisfaire aux équations du mouvement :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial q'} = e. \tag{3}$$

Cette solution sera la solution du régime périodique permanent.

2° Je puis considérer e comme la projection sur l'axe des y d'un vecteur $e_{\max}$ de grandeur constante, tournant avec la vitesse angulaire ω dans le plan des xy de ox vers oy. Ce vecteur a pour module $e_{\text{eff}}\sqrt{2}$. J'appellerai E le vecteur qui a pour module e_{eff} et qui ne diffère du vecteur $\bar{e}_{\max}$ que par le facteur $\sqrt{2}$.

Si q_{eff} et ψ sont des constantes, la quantité physique q pourra être considérée comme représentée, elle aussi, par la projection sur l'axe des y d'un vecteur $\bar{q}_{\max} = (\sqrt{2}\, q_{\text{eff}})$ situé dans le plan des xoy, faisant avec $\bar{e}_{\max}$ un angle constant $\psi - \varphi$, et tournant avec la même vitesse angulaire ω. J'appellerai Q le vecteur qui a pour module, non $q_{\text{eff}}\sqrt{2}$, mais q_{eff}. Je fais la même convention pour toutes les grandeurs analogues à e et à q.

Dès lors, la solution dont je vais montrer l'existence sera représentée par un système de n vecteurs Q situés dans le plan des xoy. Ces vecteurs ont pour grandeur la valeur efficace de la quantité algébrique correspondante. Ils forment à un moment donné, avec les vecteurs E, un diagramme de vecteurs qui se comporte comme un système de forme invariable quand le temps varie, car il se met alors à tourner autour de l'axe oz, perpendiculaire à ox et à oy avec la vitesse angulaire constante ω, la même pour tous.

3° Je fais dans les équations du mouvement (3) la substitution des grandes lettres aux petites et je donne au signe d'égalité la signification d'une équipollence.

Les n équations (3) deviennent ainsi des équations vectorielles linéaires à coefficients constants. Les inconnues y sont les vecteurs,

Digitized by Google

et dans chaque vecteur il y a à déterminer la grandeur et l'angle de phase.

Les sommes ou différences devenant des sommes ou différences géométriques, la dérivée d'un vecteur par rapport au temps représente sa vitesse. Si le vecteur est de grandeur constante et tourne avec une vitesse angulaire constante, autour de l'origine, sa vitesse est facile à déterminer.

Considérons, par exemple, le vecteur Q. Sa vitesse sera en grandeur absolue égale à ωq_{eff}. Elle sera dans le plan des xoy, c'est-à-dire perpendiculaire à oz, et elle sera dirigée par rapport à Q, pour $\omega > 0$, à 90°, comme oy l'est par rapport à ox; si donc j'appelle k le vecteur unité dirigé suivant oz et si je fais appel à la notation vectorielle, j'aurai :

$$\frac{dQ}{dt} = \omega[kQ]. \tag{4}$$

Si je pose

$$\frac{dQ}{dt} = Q', \tag{5}$$

j'aurai, de même :

$$\frac{dQ'}{dt} = \omega[kQ']. \tag{6}$$

Si je remplace Q′ par sa valeur (4), j'aurai

$$\frac{dQ'}{dt} = \omega^2\big[k[kQ]\big]. \tag{7}$$

Or, on a la règle de calcul

$$\big[\alpha[\beta\gamma]\big] = \beta(\alpha\gamma) - \gamma(\alpha\beta). \tag{8}$$

d'où :

$$\frac{dQ'}{dt} = \omega^2\big\{k(kQ) - Q(kk)\big\}. \tag{9}$$

Mais comme k et Q sont rectangulaires et que k fait avec lui-même un angle nul, on a :

$$(kQ) = 0, \qquad (kk) = +1. \tag{10}$$

Donc (9) devient :

$$\frac{dQ'}{dt} = -\omega^2 Q. \tag{11}$$

Digitized by Google

Les formules (4) et (11) donnent Q′ et $Q'' = \frac{dQ'}{dt}$ en fonction de Q.

Inversement, en comparant (6) et (11), on aura Q en fonction de Q′ :

$$(12) \qquad -\omega^2 Q = \omega[k Q'] \qquad \text{ou} \qquad Q = -\frac{1}{\omega}[k Q'],$$

et (6) donne $\frac{dQ'}{dt}$ en fonction de Q′.

On pourra donc exprimer, grâce à ces formules,

$$\frac{dp}{dt}, \quad \frac{\partial W}{\partial q}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial q'},$$

en fonction linéaire et homogène des Q, après remplacement des quantités algébriques par les quantités vectorielles correspondantes.

En résolvant ces n équations linéaires par rapport aux Q on aura aussitôt une solution des équations du mouvement. Il suffira de remplacer chaque vecteur Q par sa projection sur Oy.

Les vitesses et les accélérations de l'extrémité d'un vecteur qui tourne autour de l'origine se projettent, en effet, sur l'axe des y, suivant les vitesses et les accélérations des projections de cette extrémité sur le même axe. Les équations (3) seront ainsi satisfaites.

Nous aurons alors la solution du régime permanent.

Elle existe toujours et elle est unique, si le système contient des résistances ohmiques.

Si, en effet, le déterminant des équations était nul et si, par conséquent, la solution devenait indéterminée, cela signifierait que, dans le système déduit du système proposé par la suppression de toutes les forces électromotrices, il pourrait y avoir une solution de régime permanent différente du repos absolu. Or c'est impossible, parce que, tant que la somme des énergies potentielle et cinétique n'est pas nulle, la chaleur de Joule va toujours en s'accroissant à leurs dépens.

4°. Expression des valeurs moyennes.

Soient A et B deux vecteurs représentatifs des quantités périodiques

$$(13) \qquad \begin{cases} a = \sqrt{2}\, a_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi_a) \\ b = \sqrt{2}\, b_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi_b) \end{cases} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

On aura

$$(14) \qquad \text{Val. moy.}(ab) = \frac{1}{T}\int_0^T ab\, dt = a_{\text{eff}} b_{\text{eff}} \cos(\varphi_A - \varphi_B) = (AB).$$

Digitized by Google

La dernière parenthèse des égalités (14) porte sur des vecteurs et signifie leur produit scalaire.

Si A est égal à B, on pourra, sans confusion, décrire plus simplement A^2 au lieu de (AA).

Cherchons, par exemple, la valeur moyenne de l'énergie électrique W. On a

$$2W = B_{11} q_1^2 + 2 B_{12} q_1 q_2 + \dots, \tag{15}$$

d'où pour la valeur moyenne W_0, d'après (14)

$$2W_0 = B_{11} q_{1\,\text{eff}}^2 + 2 B_{12} q_{1\,\text{eff}} q_{2\,\text{eff}} \cos(q_1 q_2) + \dots. \tag{16}$$

Je pose maintenant, d'une façon générale

$$\frac{\partial W_0}{\partial Q_i} = B_{i1} Q_1 + B_{i2} Q_2 + \dots + B_{in} Q_n, \qquad \text{avec} \qquad B_{ij} = B_{ji}, \tag{17}$$

et j'ai, d'après la dernière expression (14),

$$2W_0 = \sum \left(\left(Q_i \frac{\partial W_0}{\partial Q_i} \right) \right). \tag{18}$$

Il suffit de tenir compte des relations (17) entre les coefficients et de l'identité évidente

$$(Q_i Q_j) = (Q_j Q_i). \tag{19}$$

Si j'appelle T l'énergie cinétique, j'ai

$$2T = A_{11} q_1'^2 + 2 A_{12} q_1' q_2' + \dots. \tag{20}$$

Si je pose, d'une façon générale,

$$P_i = A_{i1} Q_1' + A_{i2} Q_2' + \dots + A_{in} Q_n' \qquad \text{avec} \qquad A_{ij} = A_{ji}, \tag{21}$$

j'aurai, de même, pour l'énergie moyenne T_0

$$2T_0 = \sum ((P_i Q_i')). \tag{22}$$

Si j'appelle J la puissance calorifique, j'ai

$$J = R_{11} q_1'^2 + 2 R_{12} q_1' q_2' + \dots. \tag{21'}$$

Si je pose

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_0}{\partial (Q_i')} = R_{i1} Q_1' + R_{i2} Q_2' + \dots + R_{in} Q_{11}' \qquad \text{avec} \qquad R_{ij} = R_{ji}, \tag{22'}$$

Digitized by Google

j'aurai encore pour la puissance moyenne J_0

$$J_0 = \sum\left(\left(\frac{1}{2}\frac{\partial J_Q}{\partial Q_i'}Q_i'\right)\right). \tag{23}$$

5° J'appelle puissance active l'expression

$$P_a = \Sigma\, e_{\text{eff}} q'_{\text{eff}} \cos(eq') = \Sigma(EQ'). \tag{24}$$

J'appelle puissance réactive l'expression

$$P_r = \Sigma\, e_{\text{eff}} q'_{\text{eff}} \sin(\varphi_e - \varphi_{q'}) \quad \text{ou plus simplement} \quad \Sigma\, e_{\text{eff}} q'_{\text{eff}} \sin(q'e), \tag{25}$$

$\varphi_e - \varphi'_q$ étant l'avance de phase de la force électromotrice e sur le courant q'.

Je me propose de former ces expressions, au moyen des équations vectorielles du mouvement périodique permanent.

a. J'aurai aussitôt la combinaison suivante, tirée des équations (3) où les petites lettres ont été remplacées par des grandes, et où l'égalité signifie l'équipollence :

$$\sum(Q'E) = \sum\left(\left(Q'\frac{dP}{dt}\right)\right) + \sum\left(\left(Q'\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right)\right) + \sum\left(\left(Q'\frac{1}{2}\frac{\partial J_Q}{\partial Q'}\right)\right). \tag{26}$$

Je dis que les premiers termes du second membre sont nuls; qu'on a

$$\sum\left(\left(Q'\frac{dP}{dt}\right)\right) = 0, \qquad \sum\left(\left(Q'\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right)\right) = 0. \tag{27}$$

On a, en effet, d'après la formule (4) et les relations de coefficients (21)

$$\begin{aligned}\sum\left(\left(Q'\frac{dP}{dt}\right)\right) &= \sum\left(\omega(Q_i'[kP_i])\right)\\ &= \omega\sum\left(A_{ij}\right)(Q_i'[kQ_j']) + (Q_j'[kQ_i'])\Big),\end{aligned} \tag{28}$$

mais on a évidemment

$$(Q_i'[kQ_j']) + (Q_j'[kQ_i']) = 0,$$

car, dans ces deux déterminants, on a interverti les lignes i et j.

On a aussi, d'après la formule (4) et les relations de coeffi-

Digitized by Google

cients (17),

$$(29)\quad \sum\left(\left(Q'\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right)\right)=\sum\left(\omega\left([kQ_i],\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right)\right)$$
$$=\omega\sum\left(B_{ij}\{([kQ_i]Q_j)+([kQ_j]Q_i)\}\right)=0$$

pour la même raison.

On a donc

$$(36)\qquad P_a=J_0,$$

ce qui est le premier résultat que nous voulions obtenir : la puissance active moyenne se retrouve sous forme de dissipation moyenne d'énergie sous forme de chaleur de Joule.

b. Semblablement, j'ai pour le calcul de la puissance réactive, la combinaison suivante :

$$(37)\quad \sum([Q'E])=\sum\left(\left[Q'\frac{dP}{dt}\right]\right)+\sum\left(\left[Q'\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right]\right)+\sum\left(\left[Q'\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial Q'}\right]\right).$$

Je dis, tout d'abord, que le dernier terme est nul.

On a, en effet, d'après les relations de coefficients (22)',

$$(38)\quad \sum\left(\left[Q'\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial Q'}\right]\right)=\sum([Q'_i,R_{i1}Q'_1+\ldots+R_{in}Q'_n])$$
$$=\sum\left(R_{ij}\{[Q'_iQ'_j]+[Q'_jQ'_i]\}\right)=0,$$

Car on a

$$(39)\qquad [Q'_iQ'_j]=-[Q'_jQ'_i].$$

Donc, le coefficient de R_{ij} est nul, et l'expression (38) est identiquement nulle.

Calculons le premier terme du second membre de (37). On a, d'après (8)

$$(40)\quad \sum\left(\left[Q'\frac{dP}{dt}\right]\right)=\sum\omega([Q'[kP]])$$
$$=\sum\omega\left(k(Q'P)-P(kQ')\right)=\omega k\sum((Q'P))=2\omega kT_0,$$

car d'après (22), ceci est égal $2\omega kT_0$.

Calculons le second terme du second membre de (37). On a,

Digitized by Google

d'après (8)

$$(41)\qquad \sum\left(\left[Q'\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right]\right)=\sum\left(\omega\left[[kQ]\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right]\right)$$
$$=\sum\omega\left(-k\left(Q\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right)+Q\left(k\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right)\right).$$

Mais, $\frac{\partial W_Q}{\partial Q}$ est un vecteur dans le plan des xy, donc perpendiculaire à k, et il reste, d'après (18)

$$(42)\qquad \sum\left(\left[Q'\frac{\partial W_Q}{\partial Q'}\right]\right)=-\omega k\sum\left(Q\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right)=-2\omega k W_0.$$

Comparons maintenant le premier terme de (37) à la puissance réactive $\mathbf{P}_r$ donnée pour l'équation (25); on a

$$(43)\qquad \Sigma([Q'E])=k\Sigma e_{eff}q'_{eff}\sin(q'e)=k\mathbf{P}_r.$$

L'équation (37), si l'on tient compte de (38), (40) et (42), donne donc en définitive, en égalant les grandeurs des vecteurs des deux membres, tous deux dirigés suivant oz :

$$(44)\qquad \mathbf{P}_r=2\omega(T_0-W_0).$$

En résumé, la puissance réactive est égale au produit par 2ω de la différence entre les valeurs moyennes de l'énergie magnétique et de l'énergie électrique, c'est-à-dire entre les valeurs moyennes de l'énergie localisée dans le circuit magnétique ou dans le diélectrique.

Digitized by Google

CHAPITRE XI.

RECHERCHES DE PUPIN.

Je me propose, dans le Chapitre actuel, de donner un aperçu de la méthode de calcul employée par Pupin pour rechercher l'écartement qu'il convient de donner aux bobines de self-inductance à intercaler dans un circuit téléphonique pour en augmenter l'inductance moyenne par unité de longueur, sans que cette introduction de bobines empêche de considérer la ligne comme une ligne homogène.

Je m'applique à poser avec soin les équations du problème et je fais ressortir la différence entre la méthode de Pupin et celle de Vaschy, qui envisage simultanément le fil d'aller et le fil de retour. La méthode de Vaschy est plus simple. Il faut faire attention, en lisant les Mémoires, à la signification des constantes; cependant, dans les deux méthodes, les produits CR et CL conservent les mêmes valeurs. Mais le voltage entre les deux fils est le double du potentiel envisagé par Pupin.

Je traite d'abord le cas d'une ligne uniforme, et ensuite celui de la ligne chargée, c'est-à-dire pupinisée.

Le problème étant résolu, il s'agit d'examiner les conditions d'équivalence de la ligne pupinisée et d'une ligne homogène.

Je commence par montrer que la constante d'atténuation ou d'affaiblissement avec la distance est, pour une ligne homogène,

$$\beta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}},$$

ce qui montre l'intérêt qui s'attache à l'augmentation de L.

Ensuite, je montre que lorsque la demi-distance « angulaire » des bobines de pupinisation est un angle assez petit pour que l'angle puisse être confondu avec son sinus, la solution relative à la ligne

Digitized by Google

pupinisée devient identique à la solution relative à la ligne homogène équivalente.

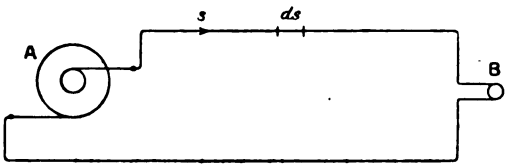
C'est le critère de Pupin.

L'illustre Pupin est un citoyen américain d'origine serbe.

I. — Oscillations électriques d'un conducteur linéaire dont la capacité, la self-inductance et la résistance sont réparties uniformément.

Le conducteur forme un circuit AB. En un point de ce circuit est un appareil transmetteur A; au point diamétralement opposé est l'ap-

Fig. 31.

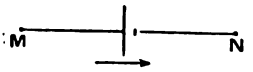


pareil récepteur B. La distance entre A et B est l; la longueur totale du circuit est $2l$. La distance d'un élément ds, comptée à partir de A, est désignée par s.

Quelles sont les équations du mouvement de l'électricité?

Soit y le courant à la distance s, dans l'élément ds; soit V le potentiel par rapport à la terre de cet élément. Il s'agit d'appliquer la loi

Fig. 32.



de l'action et de la réaction. On a, d'une façon générale, pour un élément MN de circuit,

$$V_M - V_N = Ry - E, \tag{1}$$

en supposant que V_M et V_N sont les potentiels des points M et N, que R est la résistance totale entre les points M et N, que y est le courant compté positivement dans le sens MN, et que E est de même la force électromotrice comptée positivement dans le sens où elle tend à produire un courant dirigé de M vers N.

Admettons que la quantité d'électricité $y\partial t = \partial q$ passe de M en N,

Digitized by Google

l'énergie potentielle électrostatique diminue de $(V_M - V_N)\delta q$, l'énergie fournie par la source est $E\delta q$ et la chaleur dégagée est $R_{MN}y^2\delta t$ ou $R_{MN}y.\delta q$. Par suite, les forces agissant sur la quantité δq sont la force active E, la force électrostatique (ou élastique) $V_M - V_N$, la force de viscosité $-R_{MN}y$.

Mais admettons maintenant qu'il n'y ait pas de force appliquée E entre les points MN, mais que l'on ait à prendre en considération les forces d'inertie; alors, si l'énergie cinétique est

$$\frac{1}{2}Ly^2,$$

le principe de l'égalité de l'action et de la réaction conduit à écrire qu'il y a équilibre entre les autres forces agissantes et la force d'inertie

$$-L\frac{dy}{dt}.$$

On aura donc

$$V_M - V_N = Ry + L\frac{dy}{dt}.$$

Appliquons cette formule à l'élément *ds;* changeons en même temps de notation en appelant R et L la résistance et l'inductance par unité de longueur du fil, alors R*ds* et L*ds* seront les résistance et inductance de l'élément *ds* et l'on aura à remplacer $V_M - V_N$ par $-\frac{\partial V}{\partial s}ds$, d'où

$$\left(L\frac{dy}{dt} + Ry + \frac{\partial V}{\partial s}\right)ds = 0.$$

En écrivant cette équation, on ne tient pas compte des forces électromotrices d'induction qui peuvent agir dans l'élément *ds* du fait de la variation dans les autres parties du circuit. Dans le cas des conducteurs aériens, ou d'une façon plus précise des circuits téléphoniques à double fil, l'erreur est minime, comme on le voit en traitant directement ce cas par la méthode de Vaschy.

Soit maintenant x le courant de déplacement par unité de longueur et C la capacité, également par unité de longueur, de l'élément d*s*, on a

$$x = C\frac{dV}{dt}.$$

Ce courant de déplacement est celui qui émane de l'élément *ds;* or

Digitized by Google

il entre en même temps dans cet élément le courant y par l'extrémité située du côté de la source A et il en sort le courant $y + \frac{dy}{ds} ds$ par l'extrémité opposée, on a donc

$$x\,ds = y - \left(y + \frac{\partial y}{\partial s}\,ds\right),$$

d'où

$$C\frac{dV}{dt} = -\frac{\partial y}{\partial s},$$

et par suite, en éliminant V, on a pour équation de la propagation

$$L\frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.$$

Soit maintenant

$$e = f(t),$$

la force électromotrice en A.

Appelons $R_0L_0C_0$, $R_1L_1C_1$ les constantes (résistance, inductance, capacité) des appareils transmetteur et récepteur respectivement; et cherchons les équations aux limites. Soient V_0 le potentiel en $s = 0$, V_{2l} le potentiel au point $(s = 2l)$; soient de même V_l et V_l' les potentiels pour $s = l$ aux deux bornes du récepteur.

Les condensateurs de capacité C_0 et C_1 coupent les branches d'émission et de réception, soit P_0 la différence de potentiel entre les armatures de C_0, P_1 la différence de potentiel entre les armatures de C_1, le champ électrostatique étant compté positivement dans le même sens que s et que y. On a alors :

$$V_{2l} - P_0 - V_0 = R_0 y - \left[f(t) - L_0\frac{dy}{dt}\right],$$

$$V_l - P_1 - V_{l'} = R_1 y - \left(-L_1\frac{dy}{dt}\right),$$

ou

$$\left(L_0\frac{dy}{dt} + R_0 y + P_0 + V_0 - V_{2l}\right)_{s=0} = f(t),$$

$$\left(L_1\frac{dy}{dt} + R_1 y + P_1 + V_{l'} - V_l'\right)_{s=l} = 0.$$

Si nous admettons que le système est parfaitement symétrique, nous pourrons considérer que les deux bornes de la branche de transmission sont à des potentiels égaux et de signes contraires et qu'il en est de même pour les deux bornes de la branche de récep-

Digitized by Google

tion. On aura alors

$$V_0 = -V_{2l},$$
$$V_l = -V_{l'},$$

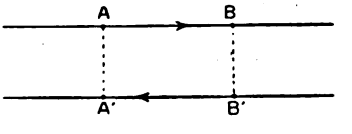
et, d'une façon générale, les potentiels pour les points (s et $2l - s$) seront supposés égaux et de signes contraires.

Il est clair que $2Rl$ est la résistance totale de la ligne, de sorte que si R est la résistance d'un brin par unité de longueur, $2R$ est la résistance par unité de longueur du circuit à double fil. De même C est la capacité par unité de longueur d'un brin par rapport à la terre, de sorte que $\frac{C}{2}$ est la capacité d'un brin par rapport à l'autre; les deux capacités par rapport à la terre se comportant comme deux condensateurs en cascade reliant un des brins à l'autre; semblablement, L est l'inductance d'un brin par unité de longueur, et l'inductance a la même valeur pour l'autre brin; de sorte que, pour le circuit formé par les deux brins, l'inductance est $2L$.

Or, remarquons que l'équation de la propagation ne dépend que des deux constantes CL et CR. Si R et L sont doublées en même temps que C est divisé par deux, ces constantes restent inaltérées. Il en résulte que l'on peut à volonté admettre que RLC se rapportent à l'unité de longueur de fil, comme nous venons de le faire, ou à l'unité de longueur de circuit, comme le fait Vaschy.

Dans la méthode de Vaschy, on considère simultanément le fil d'aller et le fil de retour et l'on porte son attention sur une tranche. On suppose que l'énergie magnétique et l'énergie électrostatique sont distribuées autour des fils dans cette tranche, de la même façon que si le courant était un courant permanent.

Fig. 33.



On admet en outre que le courant a la même valeur dans les éléments AB et A'B' en regard, mais que leur direction est de sens contraire.

On écrit alors que l'intégrale de la force électrique le long du chemin ABB'A' est égale à la variation instantanée du flux d'induction

Digitized by Google

magnétique embrassé changé de signe $\left(-\mathrm{L}\frac{di}{dt}\right)ds$, d'où, en appelant V la différence de potentiel entre les deux fils et non, comme plus haut, la différence de potentiel entre un fil et la terre, et en désignant par R la somme des résistances par unité de longueur des deux fils

$$\mathrm{R}i + \mathrm{L}\frac{di}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s}.$$

De même en écrivant que le courant de déplacement prolonge le courant de conductibilité, et tenant compte de la perte latérale, on a pour seconde équation l'équation de continuité

$$\mathrm{SV} + \mathrm{C}\frac{d\mathrm{V}}{dt} = -\frac{\partial i}{\partial s}.$$

Dans cette équation, C est la capacité par unité de longueur du condensateur dont les deux armatures sont les deux brins en regard et non, comme dans la méthode de Pupin, la capacité par rapport à la terre, c'est-à-dire par rapport à l'ensemble des points du champ qui sont au potentiel zéro.

Si maintenant nous revenons aux équations aux limites, on peut ajouter que les différences de potentiel P_0 et P_1 sont reliées aux courants y par les relations

$$\mathrm{C}_0\frac{d\mathrm{P}_0}{dt} = y_{s=0}, \qquad \mathrm{C}_1\frac{d\mathrm{P}_1}{dt} = y_{s=l}.$$

II. — SOLUTION POUR LE CAS OÙ LA LIGNE EST BOUCLÉE EN B ET OÙ LA FORCE ÉLECTROMOTRICE AGISSANTE EST DE LA FORME $\mathrm{E}e^{pt}$, LA BRANCHE D'ÉMISSION NE COMPRENANT QUE CETTE FORCE ÉLECTROMOTRICE PUREMENT ET SIMPLEMENT.

L'équation de la propagation est

$$\left(\mathrm{R} + \mathrm{L}\frac{d}{dt}\right)\left(\mathrm{S} + \mathrm{C}\frac{d}{dt}\right)\mathrm{V} - \frac{d^2\mathrm{V}}{ds^2} = 0.$$

Je pose

$$\mathrm{V} = \mathrm{E}\frac{e^{pt}\sin\mu(l-s)}{\sin\mu l}.$$

On aura bien, à l'origine, pour $s = 0$,

$$\mathrm{V} = \mathrm{E}\,e^{pt},$$

et à l'extrémité, pour $s = l$,

$$\mathrm{V} = 0.$$

Digitized by Google

Puis, en substituant dans l'équation de la propagation, on aura

$$(R + Lp)(S + Cp) + \mu^2 = 0,$$

et cette équation est l'équation caractéristique qui détermine μ quand on s'est donné p. Si l'on prend p égal à $\frac{2\pi}{T}\sqrt{-1}$, la force électromotrice est la force électromotrice

$$E e^{\frac{2\pi t}{T}\sqrt{-1}},$$

qui a pour période T. La partie purement imaginaire représente une force électromotrice sinusoïdale à laquelle correspondra la partie purement imaginaire de V.

Si donc la force électromotrice est

$$E \sin \frac{2\pi t}{T},$$

la solution sera le coefficient de $\sqrt{-1}$, dans l'expression

$$V = \frac{E e^{\frac{2\pi t}{T}\sqrt{-1}} \sin \mu(l - s)}{\sin \mu l}.$$

Ici V est la différence de potentiel entre les deux fils. Si, au contraire, on appelle V le potentiel d'un des fils et $-V$ le potentiel de l'autre, il faudra diviser par 2 le second membre. On aurait alors

$$V = \frac{E}{2} e^{\frac{2\pi t}{T}\sqrt{-1}} \frac{\sin \mu(l - s)}{\sin \mu l}.$$

C'est la notation de Pupin. Si, en conservant cette même notation, nous supposons $S = 0$, il viendra, pour le courant y,

$$C \frac{dV}{dt} = -\frac{dy}{ds},$$

d'où

$$\frac{2\pi}{T}\sqrt{-1}\,\frac{CE}{2} e^{\frac{2\pi t}{T}\sqrt{-1}} \frac{\cos \mu(l - s)}{2\mu \sin \mu l} = -\frac{dy}{ds}$$

ou

$$y = -CE\frac{2\pi}{T}\sqrt{-1}\, e^{\frac{2\pi t}{T}\sqrt{-1}} \frac{\cos \mu(l - s)}{2\mu \sin \mu l},$$

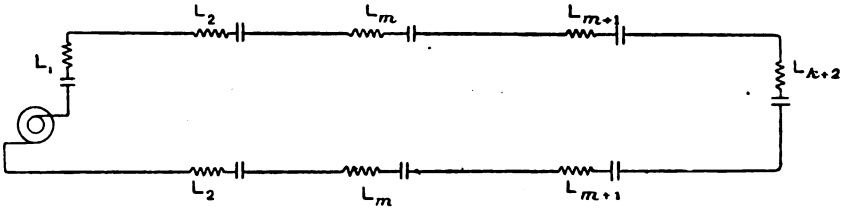
μ ayant toujours la valeur complexe déterminée par l'équation caractéristique que nous avons obtenue plus haut.

Digitized by Google

III. — Propagation sur un conducteur pupinisé.

La figure ci-dessous représente un conducteur pupinisé. A des intervalles égaux sont embrochées $2k+2$ bobines identiques, L_1,

Fig. 34.



L_2, etc. Pour donner plus de généralité à la discussion, on peut supposer, sans augmenter en rien la difficulté du calcul, que l'on ait intercalé en série, avec chaque bobine, un condensateur embroché de capacité C_0. La résistance et l'inductance de chaque bobine seront désignées par R_0 L_0. Quant à RCL, ce sont les constantes en ligne courante par unité de longueur.

Soit $2l$ la longueur du circuit, alors la distance entre deux bobines consécutives est $\frac{2l}{2k+2}$ ou $\frac{l}{k+1}$.

Les courants dans les bobines seront désignés par $x_1\ x_2 \ldots x_{k+1}$ et x_{k+2}.

Le courant en ligne courante étant y, on a pour équation de la propagation

$$L\frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2},$$

ce qui suppose que le défaut d'isolement d'un fil par rapport à l'autre est négligeable.

Si l'on considère la section comprise entre les bobines L_m et L_{m+1}, le courant y doit prendre aux deux extrémités de cette section les valeurs x_m et x_{m+1}. Nous appellerons y_m le courant dans cette section en un point situé à la distance ξ de la bobine L_m. On aura donc

$$(y_m)_{\xi=0} = x_m \qquad \text{et} \qquad (y_{m-1})_{\xi=\frac{k+1}{l}} = x_m.$$

Digitized by Google

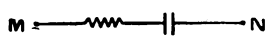
Je suppose que la force électromotrice agissante est de la forme

$$E\, e^{pt\sqrt{-1}},$$

de sorte que p est la pulsation.

Alors, une fois le régime périodique établi, les courants et les potentiels sont aussi des fonctions du temps de même forme que la force électromotrice appliquée. La différence de potentiel $V_M - V_N$

Fig. 35.



aux deux extrémités de la bobine de rang m est donnée par l'équation

$$V_M - P - V_N = R_0 x_m + L_0 \frac{dx_m}{dt},$$

où P est la différence de potentiel du condensateur, et l'on a

$$C_0 \frac{dP}{dt} = x_m.$$

D'autre part, l'équation du courant de déplacement pour la ligne courante est

$$C \frac{dV}{dt} = - \frac{\partial \gamma}{\partial s},$$

ce qui nous donne ici :

$$C \frac{dV_M}{dt} = - \left(\frac{\partial \gamma_{m-1}}{\partial \xi} \right)_{\xi = \frac{1}{k+1}}, \qquad C \frac{dV_N}{dt} = - \left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial \xi} \right)_{\xi = 0}.$$

Donc, en dérivant par rapport au temps, on a

$$\frac{dV_M}{dt} - \frac{dP}{dt} - \frac{dV_N}{dt} = R_0 \frac{dx_m}{dt} + L_0 \frac{d^2 x_m}{dt^2},$$

puis

$$\frac{dx_m}{dt} = \sqrt{-1}\, p\, x_m, \qquad \frac{d^2 x_m}{dt^2} = - p^2 x_m,$$

d'où, en éliminant les potentiels, l'équation aux limites

$$(A) \qquad \left(\frac{\partial \gamma_{m-1}}{\partial \xi} \right)_{\xi = \frac{1}{k+1}} - \left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial \xi} \right)_{\xi = 0} = - C(- p^2 \lambda_0 + ip R_0) x_m = - h x_m$$

Digitized by Google

avec

$$h = C(-p^2\lambda_0 + ip R_0),$$
$$\lambda_0 = L_0 - \frac{1}{p^2 C_0}.$$

Il y a k équations de cette forme. Ecrivons les équations aux limites pour la première et la dernière bobine.

Posons

$$D = \sqrt{-1}\, p\, CE\, e^{pt\sqrt{-1}},$$

il vient pour la première bobine

$$(B) \qquad -2\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = D - h x_1,$$

et pour la dernière

$$(C) \qquad 2\left(\frac{\partial \gamma_{k+1}}{\partial \xi}\right)_{\xi=\frac{l}{k+1}} = -h x_{k+2}.$$

Si l'on se donne x_m et x_{m+1}, il est clair que la solution pour y_m est

$$y_m = \frac{x_m \sin\mu\left(\frac{l}{k+1} - \xi\right) + x_{m+1}\sin\mu\xi}{\sin\frac{\mu l}{k+1}},$$

à condition que μ satisfasse à l'équation caractéristique.

Nous avons maintenant à déterminer les $k+2$ constantes $x_1\ x_2 \ldots x_{k+2}$ d'après les $k+2$ équations aux limites (A) (B) (C).

Je pose

$$\sigma = h\frac{\sin\frac{\mu l}{k+1}}{\mu} - 4\sin^2\frac{1}{2}\frac{\mu l}{k+1},$$
$$\rho = \frac{\sin\frac{\mu l}{k+1}}{\mu} D,$$

et les équations aux limites s'écrivent alors sous la forme :

$$(B') \qquad (\sigma+1)x_1 - 0 - x_2 = \frac{\rho}{2} + \frac{\sigma}{2}x_1.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(A') \qquad (\sigma+2)x_m - x_{m-1} - x_{m+1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(C') \qquad (\sigma+1)x_{k+2} - x_{k+1} - 0 = \frac{\sigma}{2}x_{k+2}.$$

Digitized by Google

Introduisons l'angle ψ défini par la relation

$$\sigma + 2 = 2\cos 2\psi,$$

alors on a

$$x_m = -\frac{D \sin \frac{\mu l}{k+1} \cos 2(k-m+2)\psi}{2\mu \sin 2\psi \sin 2(k+1)\psi}$$

et

$$y = -\frac{D\left[\cos 2(k-m+2)\psi \sin \mu\left(\frac{l}{k+1} - \xi\right) + \cos 2(k-m+1)\psi \sin \mu\xi\right]}{2\mu \sin 2\psi \sin 2(k+1)\psi}.$$

Le problème est donc complètement résolu au point de vue mathématique.

IV. — Équivalence d'un conducteur pupinisé au conducteur homogène correspondant.

Il y a trois lignes à considérer :

La ligne primitive, dont les constantes sont CRL;

La ligne pupinisée, qui comporte, de place en place, les bobines de pupinisation;

La ligne équivalente qui est la ligne homogène qui se comporterait sensiblement comme la ligne pupinisée.

Cette ligne équivalente a des constantes différentes de la ligne primitive; en particulier, son inductance peut être accrue.

Observons d'abord ceci : Une équation de la forme

$$y = f(x - Vt)$$

représente une onde qui se propage avec la vitesse V dans la direction positive de l'axe des t, car si nous portons notre attention sur les points pour lesquels $x - Vt$ a la même valeur, on a pour ces points

$$x - Vt = \text{const.},$$

d'où, en dérivant,

$$dx - V\,dt = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = V,$$

ce qui indique que les points où y reprend la même valeur se déplacent avec la vitesse V.

Digitized by Google

Si l'on considère la fonction

$$y = e^{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\sqrt{-1}},$$

la vitesse de propagation sera $\frac{\lambda}{T}$; T est la période, λ est la longueur d'onde.

Si, enfin, l'on considère la fonction

$$y = e^{-\beta x} e^{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\sqrt{-1}},$$

la fonction représentera une onde qui se propage avec la vitesse $V = \frac{\lambda}{T}$ mais en s'affaiblissant avec la distance, suivant une loi exponentielle. β s'appelle la constante d'affaiblissement.

Or, quand une onde de la forme

$$y = e^{at-bs}$$

se propage sur la ligne dont l'équation de propagation est

$$L\frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{dy}{dt} - \frac{1}{C}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = 0,$$

on a, entre a et b, les relations

$$La^2 + Ra - \frac{1}{C}b^2 = 0,$$

d'où

$$b = \sqrt{C(La^2 + Ra)}.$$

Si je pose

$$a = \omega\sqrt{-1},$$

ω étant la pulsation imposée, la partie réelle de b, qui détermine l'affaiblissement, sera donnée par le calcul ci-après.

Soit

$$b = \beta + \alpha\sqrt{-1},$$

on aura, d'après l'équation qui détermine b,

$$b^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta\sqrt{-1} = C(-L\omega^2 + R\omega\sqrt{-1}),$$

d'où, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires

$$\beta^2 - \alpha^2 = -CL\omega^2,$$
$$2\beta\alpha = CR\omega.$$

Digitized by Google

La transmission ne sera bonne que si β est petit, il faudra donc que $CR\omega$ ne dépasse pas certaines limites; alors β^2 sera négligeable devant α^2 et l'on pourra écrire

$$\alpha = \omega\sqrt{CL},$$

la seconde équation donne alors

$$\beta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

On voit donc que l'affaiblissement dû à la distance qui dépend de β sera d'autant moindre que L sera plus grand, toutes choses égales d'ailleurs. Le but à atteindre est donc d'augmenter le coefficient L de la ligne par des bobines d'inductance élevée, sans augmenter sensiblement la résistance ohmique. La pupinisation aura rempli son effet si la ligne pupinisée peut être sensiblement assimilée à une ligne homogène dont l'inductance soit accrue, sans que cette augmentation soit achetée au prix d'une résistance supplémentaire corrélative par trop élevée.

DISCUSSION DE PUPIN.

Pupin étudie l'équation (page 189, ligne 2)

$$\sigma + 2 = 2\cos 2\psi$$

ou

$$\frac{h\sin\frac{\mu l}{k+1}}{\mu} + 2\cos\frac{\mu l}{k+1} = 2\cos 2\psi$$

ou

$$\frac{h\sin\frac{\mu l}{k+1}}{\mu} - 4\sin^2\frac{1}{2}\frac{\mu l}{k+1} = -4\sin^2\psi.$$

où h, μ et ψ ont les valeurs qui correspondent à une pulsation particulière p. S'il s'agit de transmission téléphonique, ce sera la pulsation qui correspond à la hauteur des sons les plus importants de la voix humaine. L'expérience a permis de déterminer cette valeur. La pulsation à considérer est celle de 5000. M. Devaux-Charbonnel a pu s'en rendre compte en interposant des dispositifs amortisseurs empêchant de passer soit les fréquences élevées, soit les fréquences basses.

Digitized by Google

Quand les ondes sont ainsi filtrées, si les ondes dont la pulsation est dans le voisinage de 5000 ne sont pas arrêtées, la voix reste compréhensible.

On aura d'ailleurs

$$\mu^2 = -C(-p^2L + ipR),$$

p étant la pulsation.

La quantité μ est imaginaire de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

et l'on a

$$\alpha \geq \beta.$$

Si λ est la longueur d'onde correspondant à la pulsation envisagée sur le fil homogène primitif, on avait, avant l'introduction des bobines,

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Pupin appelle θ la distance angulaire entre deux bobines consécutives pour la même pulsation, et il la définit par l'égalité

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\theta}{\frac{k+1}{l}},$$

d'où

$$\theta = \frac{l}{k+1}\alpha.$$

Par suite, si θ est assez petit pour que l'on ait

$$\sin\theta = \theta,$$

nous aurons

$$\frac{l}{k+1}h - \left(\frac{l}{k+1}\right)^2\mu^2 = -\frac{1}{4}\sin^2\psi$$

ou, comme on va voir,

$$\text{(D)} \qquad \left(\frac{l}{k+1}\right)^2 C[-p^2(\rho + L) + ip(r + R)] = -\frac{1}{4}\sin^2\psi,$$

où ρ et r sont respectivement l'inductance et la résistance par unité de longueur des bobines embrochées.

Ainsi on avait

$$h = C(-p^2\lambda_0 + ipR_0).$$

On pose

$$\rho = \frac{(k+1)\lambda_0}{l} \qquad r = \frac{(k+1)R_0}{l}$$

Digitized by Google

et il vient

$$h = \frac{l}{k+1} C(-p^2\rho + ipr),$$

ce qui justifie la formule (D).

Le conducteur homogène qui, par unité de longueur, a pour résistance $r+R$ et pour inductance $\rho+L$, sera dit le conducteur homogène équivalent à la ligne pupinisée.

Pour ce conducteur homogène équivalent, on aurait, pour la pulsation considérée, une valeur particulière de la constante que nous avons appelée μ dans le cas de la ligne primitive. Appelons-la μ' pour le conducteur équivalent, et posons

$$\mu' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

avec encore $\alpha' > \beta'$ et $\alpha' = \frac{2\pi}{\lambda'}$, en appelant λ' la longueur d'onde, toujours pour la pulsation considérée; on aura alors

$$\mu' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \sqrt{-C[-p^2(\rho+L) + p\sqrt{-1}(r+R)]}.$$

L'équation (D), en extrayant les racines carrées des deux membres, donne

$$\frac{1}{2}\frac{l}{k+1}(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = \sin\psi. \tag{D'}$$

Introduisons un angle analogue à l'angle θ, qui sera la distance angulaire entre deux bobines consécutives rapportée à la ligne équivalente; cet angle φ' sera défini par

$$\varphi' = \frac{l}{k+1}\alpha'.$$

Si l'angle $\frac{1}{2}\varphi'$ est assez petit pour qu'on puisse confondre le sinus et l'arc, on pourra écrire, puisque β' est plus petit que α',

$$\sin\frac{1}{2}\frac{l}{k+1}(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = \sin\psi, \tag{D''}$$

ou encore

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{l}{k+1}\mu'.$$

Digitized by Google

Faisons cette substitution dans l'équation

$$x_m = - \frac{D \sin \frac{\mu l}{k+1} \cos(2k - m + 2)\psi}{2\mu \sin 2\psi \sin 2(k+1)\psi}.$$

Il vient, en faisant $\frac{m}{k} = \frac{\xi}{l}$,

$$x_m = + \frac{D \cos \mu \xi}{2\mu \sin \mu l},$$

ce qui est la valeur de γ, solution du problème II, relatif au courant de la ligne bouclée.

L'équation de la propagation des ondes sur un conducteur non homogène, c'est-à-dire pupinisé, est, dans ces conditions, le même que pour le conducteur homogène équivalent. Les deux conducteurs ont approximativement la même longueur d'onde et la même constante d'affaiblissement pour la pulsation considérée. Le degré d'approximation est le même que le degré d'approximation dans l'égalité entre $\sin \frac{\varphi'}{2}$ et $\frac{\varphi'}{2}$.

Digitized by Google

CHAPITRE XII.

TÉLÉPHONIE ET PUPINISATION.

Les paragraphes qui suivent sont consacrés à l'étude du courant périodique en régime permanent sur une ligne téléphonique.

Je montre que l'on passe du potentiel V_0 et du courant I_0 à l'origine d'une section de ligne au potentiel V et au courant I à l'extrémité de ladite section par des formules auxquelles on peut donner la forme d'un changement d'axes de coordonnées rectangulaires, le changement consistant en une simple rotation d'un angle imaginaire. Il faut pour cela envisager le point

$$X = V_0, \qquad Y = \sqrt{-1}\, Z I_0,$$

dont les deux coordonnées ont les dimensions d'un voltage. L'angle est $al\sqrt{-1}$, où a est la constante de propagation et l la longueur de la section.

L'addition de sections bout à bout, quand elles ont même caractéristique, équivaut à une succession de rotations.

Je donne les formules qui conviennent, quand on se donne les branches de transmission et de réception.

Revenant à la pupinisation, je montre qu'on obtient le critère de Pupin d'une façon plus simple en assimilant une section coupée en son milieu par une bobine de pupinisation à un élément de ligne homogène.

Je montre ensuite que le nombre des bobines est d'au moins six par longueur d'onde et que l'onde, dans son mouvement de progression, rencontre environ 10000 bobines à la seconde.

J'explique ensuite, d'après Pleijel, l'équivalence d'une ligne artificielle en H avec une section de ligne homogène.

Enfin, je calcule, en suivant de près cet auteur, le coefficient d'affaiblissement d'une ligne pupinisée.

Digitized by Google

COURANTS ALTERNATIFS.

Étant donnée une section d'un circuit, déterminer le courant et le potentiel à l'extrémité en fonction du courant et du potentiel à l'origine ($\rho\lambda\sigma\gamma$, résistance, inductance, perte, capacité spécifiques).

Les équations courantes du mouvement de l'électricité sont :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\rho + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right) i, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = \left(\sigma + \gamma\frac{\partial}{\partial t}\right) v. \tag{2}$$

Supposons que la pulsation soit ω, prenons alors

$$v = \mathrm{V}e^{\omega t\sqrt{-1}}, \qquad i = \mathrm{I}e^{\omega t\sqrt{-1}}. \tag{3}$$

V et I étant des quantités imaginaires, nous satisferons aux équations (1) et (2), en déterminant I et V par

$$-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = (\rho + \omega\lambda\sqrt{-1})\,\mathrm{I}, \tag{4}$$

$$-\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x} = (\sigma + \omega\gamma\sqrt{-1})\,\mathrm{V}, \tag{5}$$

et nous aurons une solution de régime périodique permanent, en prenant les valeurs réelles ou les coefficients de $\sqrt{-1}$ des expressions (3) de i et de v.

Je pose

$$a^2 = (\rho + \omega\lambda\sqrt{-1})(\sigma + \omega\gamma\sqrt{-1}), \tag{6}$$

j'aurai

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2} = a^2\mathrm{V}, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial x^2} = a^2\mathrm{I}. \tag{7}$$

Je dis que, si V_0 et I_0 sont la différence de potentiel et l'intensité à l'origine, on a

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0\cos ax\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\,\mathrm{Z}\mathrm{I}_0\sin ax\sqrt{-1}, \tag{8}$$

$$\sqrt{-1}\,\mathrm{Z}\mathrm{I} = -\mathrm{V}_0\sin ax\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\,\mathrm{Z}\mathrm{I}_0\cos ax\sqrt{-1}, \tag{9}$$

en posant

$$\mathrm{Z} = \sqrt{\frac{\rho + \omega\lambda\sqrt{-1}}{\sigma + \omega\gamma\sqrt{-1}}}, \tag{10}$$

Digitized by Google

d'où

$$\begin{cases} aZ = \rho + \omega\lambda\sqrt{-1}, \\ \dfrac{a}{Z} = \sigma + \omega\gamma\sqrt{-1}. \end{cases}$$

En effet, pour $x = 0$, j'ai

$$V = V_0, \qquad I = I_0. \tag{11}$$

D'autre part, les expressions (8) et (9) de V et de I satisfont aux équations (7).

Enfin, si je dérive (8) par rapport à x, j'ai

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -a\sqrt{-1}\sin ax\sqrt{-1} - ZI_0 a\cos ax\sqrt{-1} \tag{12}$$

ou

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = a\sqrt{-1}\,(V_0\sin ax\sqrt{-1} - ZI_0\sqrt{-1}\cos ax\sqrt{-1})$$

ou, d'après (9),

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = a\sqrt{-1}\,(-\sqrt{-1}\,ZI) \tag{13}$$

et, d'après (6) et (10), on retombe sur l'équation (4)

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = (\rho + \omega\lambda\sqrt{-1})I. \tag{4}$$

Des équations (7) et de l'équation (4) on déduirait (5), de même que de (5) et (4) on a déduit (7). La solution est donc démontrée.

Les équations (8) et (9) sont celles qui expriment en géométrie analytique un changement d'axe de coordonnées.

Posons

$$X = V_0, \qquad Y = I_0 Z\sqrt{-1}. \tag{14}$$

Faisons tourner les axes d'un angle $\theta = ax\sqrt{-1}$ et appelons $(X'Y')$ les nouvelles coordonnées du point (XY), on a, d'après les formules de transformation connues,

$$X' = X\cos\theta + Y\sin\theta, \tag{15}$$

$$Y' = -X\sin\theta + Y\cos\theta. \tag{16}$$

Digitized by Google

Posons

$$X' = V, \qquad Y' = IZ\sqrt{-1}, \tag{17}$$

les équations (15) et (16) deviennent les équations (8) et (9).

Conséquences :

1° Donnons-nous I et V, quelles seront les valeurs de $I_0 V_0$? On peut résoudre les équations (8) et (9); mais il est plus simple de changer x en $-x$ et l'on a

$$V_0 = V\cos ax\sqrt{-1} - \sqrt{-1}\,ZI\sin ax\sqrt{-1}, \tag{18}$$

$$\sqrt{-1}\,ZI_0 = V\sin ax\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\,ZI\cos ax\sqrt{-1}. \tag{19}$$

2° Ajoutons à la section de ligne considérée une autre section, de longueur x' et dont les constantes seront a' à la place de a pour constante de propagation et Z' à la place de Z pour caractéristique.

Pour avoir le potentiel et l'intensité à la fin de la seconde section en fonction de I_0 et V_0, il suffira d'écrire pour chaque section les équations analogues à (8) et (9) et d'éliminer les valeurs du potentiel et de l'intensité du courant au point de raccordement.

Mais si l'on a

$$Z' = Z, \tag{20}$$

on voit que tout revient à opérer successivement deux rotations, d'un angle $ax\sqrt{-1}$ d'abord, d'un angle $a'x'\sqrt{-1}$ ensuite.

On aura donc pour V et I à l'extrémité

$$V = V_0\cos(ax + a'x')\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\,ZI_0\sin(ax + a'x')\sqrt{-1}, \tag{21}$$

$$\sqrt{-1}\,ZI = -V_0\sin(ax + a'x')\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\,ZI_0\cos(ax + a'x')\sqrt{-1}. \tag{22}$$

3° Enfin on aura

$$V^2 - Z^2I^2 = \text{const.} \tag{23}$$

4° Supposons qu'à l'origine on ait une force électromotrice $Ee^{\omega t\sqrt{-1}}$ avec une impédance Z_0 et qu'à l'extrémité on ait un récepteur d'impédance Z_1.

Appelons l la longueur de la section, on aura pour $x = 0$

$$-V_0 = Z_0 I_0 - E$$

Digitized by Google

ou

$$E = V_0 + Z_0 I_0 \tag{24}$$

et pour $x = l$

$$V_1 = Z_1 I_1. \tag{25}$$

De (25) on tire, en posant, pour abréger,

$$\sin al\sqrt{-1} = S, \qquad \cos al\sqrt{-1} = C, \tag{26}$$

$$\sqrt{-1}Z(V_0 C + \sqrt{-1}ZI_0 S) = Z_1(-V_0 S + \sqrt{-1}ZI_0 C), \tag{27}$$

ou

$$\frac{V_0}{\sqrt{-1}ZZ_1 C + Z^2 S} = \frac{I_0}{\sqrt{-1}ZC + Z_1 S}. \tag{28}$$

Posons ces deux rapports égaux à $\frac{E}{\Delta}$; on aura, d'après l'équation (24),

$$\Delta = (\sqrt{-1}ZZ_1 C + Z^2 S) + Z_0(\sqrt{-1}ZC + Z_1 S),$$

ou

$$\Delta = C\sqrt{-1}Z(Z_1 + Z_0) + S(Z^2 + Z_1 Z_0), \tag{29}$$

d'où

$$V_0 = \frac{E}{\Delta}(\sqrt{-1}Z_1 C + ZS)Z, \qquad I_0 = \frac{E}{\Delta}(\sqrt{-1}ZC + Z_1 S). \tag{30}$$

La solution du problème, qui consiste à trouver V et I en fonction de la force électromotrice appliquée E et des impédances au départ et à l'arrivée est donc donnée par les équations (8) et (9), où V_0 et I_0 ont les valeurs (30).

On obtient ainsi :

$$V = \frac{E}{\Delta}Z(\sqrt{-1}Z_1 \cos a(l-x) + \sqrt{-1}Z\sin a(l-x)\sqrt{-1}, \tag{31}$$

$$I = \frac{E}{\Delta}(Z_1 \sin a(l-x)\sqrt{-1} + Z\sqrt{-1}\cos a(l-x)\sqrt{-1}. \tag{32}$$

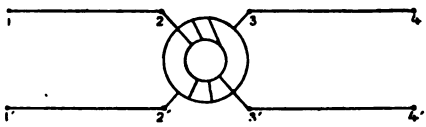
Problème :

Déterminer l'intensité et le voltage à l'extrémité d'une section de circuit, en fonction de l'intensité et du voltage à l'origine, en admettant qu'on ait intercalé au milieu de la section une bobine de pupinisation.

Digitized by Google

La longueur l de la section se trouve divisée par la bobine en deux sections de longueur $\frac{l}{2}$.

Fig. 36.



Soient :

$V_1 I_1$, $V_4 I_4$ le voltage et l'intensité à l'origine et à l'extrémité de la section considérée;

$V_2 I_2$, $V_3 I_3$ le voltage et l'intensité à l'entrée et à la sortie de la bobine de pupinisation.

Si W est l'impédance de la bobine, on aura

$$V_2 - V_3 = W I_2 \qquad \text{et} \qquad I_2 = I_3. \tag{1}$$

Soit Z l'impédance caractéristique de la ligne.

Posons, pour abréger,

$$c = \cos \frac{1}{2} al\sqrt{-1}, \qquad s = \sin \frac{1}{2} al\sqrt{-1}. \tag{2}$$

Nous aurons

$$V_2 = V_1 c + \sqrt{-1}\, Z s I_1, \tag{3}$$

$$I_2 = I_1 c - \frac{s}{\sqrt{-1}\, Z} V_1. \tag{4}$$

$$V_4 = V_3 c + \sqrt{-1}\, Z s I_3, \tag{5}$$

$$I_4 = I_3 c - \frac{s}{\sqrt{-1}\, Z} V_3. \tag{6}$$

Dans V_4 remplaçons V_3 et I_3 en fonction de V_2 et I_2, nous avons, d'après (1), (5) et (6),

$$V_4 = c(V_2 - W I_2) + \sqrt{-1}\, Z s I_2, \tag{7}$$

ou

$$V_4 = c V_2 + I_2(-cW + \sqrt{-1}\, Z s). \tag{8}$$

Remplaçons I_2 et V_2 par leurs valeurs en fonction de I_1 et V_1, on

Digitized by Google

a, d'après (3), (4), (7) et (8),

$$(9)\qquad V_4 = c\left(V_1 c + \sqrt{-1}\,Z s I_1\right) + \left(\sqrt{-1}\,Z s - cW\right)\left(I_1 c - \frac{s}{\sqrt{-1}\,Z} V_1\right)$$

ou, en ordonnant,

$$(10)\qquad V_4 = V_1\left(c^2 - s^2 + \frac{sc}{\sqrt{-1}\,Z}\right) + I_1\left(2\sqrt{-1}\,Z s c - c^2 W\right).$$

Je pose, pour abréger,

$$(11)\qquad C = \cos al\sqrt{-1}, \qquad S = \sin al\sqrt{-1}.$$

J'ai

$$(12)\qquad c^2 - s^2 = C, \qquad 2sc = S, \qquad c^2 = \frac{1+C}{2},$$

d'où, pour l'équation (10),

$$(13)\qquad V_4 = V_1\left(C + \frac{S}{\sqrt{-1}\,Z}\,\frac{W}{2}\right) + I_1\left(S\sqrt{-1}\,Z - \frac{W}{2}(1+C)\right).$$

Opérons de même pour I_4, il vient

$$(14)\qquad I_4 = I_2 c - \frac{s}{\sqrt{-1}\,Z}(V_2 - W I_2),$$

ou, en réunissant les termes semblables,

$$(15)\qquad I_4 = I_2\left(c + \frac{W}{\sqrt{-1}\,Z}s\right) - \frac{V_2 s}{\sqrt{-1}\,Z},$$

ou bien, d'après les valeurs de I_2 et de V_2 en fonction de I_1 et de V_1,

$$(16)\qquad I_4 = \left(c + \frac{W}{\sqrt{-1}\,Z}s\right)\left(I_1 c - \frac{s}{\sqrt{-1}\,Z} V_1\right) - \frac{s}{\sqrt{-1}\,Z}\left(V_1 c + \sqrt{-1}\,Z s I_1\right),$$

ou, en réunissant les termes semblables,

$$(17)\qquad I_4 = I_1\left(c^2 - s^2 + \frac{Wsc}{\sqrt{-1}\,Z}\right) + V_1\left(-\frac{2sc}{\sqrt{-1}\,Z} - \frac{Ws^2}{(\sqrt{-1}\,Z)^2}\right)$$

et, en passant aux lignes trigonométriques de l'arc double,

$$(18)\qquad I_4 = I_1\left(C + \frac{SW}{2\sqrt{-1}\,Z}\right) - V_1\left(\frac{S}{Z\sqrt{-1}} - \frac{W}{2Z^2}(1-C)\right).$$

Remarquons que l'on a; entre les coefficients des expressions de

Digitized by Google

I_1 et de V_1, la relation

$$(19)\quad \left(C+\frac{SW}{2\sqrt{-1}Z}\right)^2+\left(S\sqrt{-1}Z-\frac{W}{2}(1+C)\right)\left(\frac{S}{Z\sqrt{-1}}-\frac{W}{2Z^2}(1-C)\right)=1;$$

de sorte qu'on pourra écrire, au lieu de (13) et (18),

$$(20)\quad V_2=C'V_1+\sqrt{-1}Z'S'I_1,$$

$$(21)\quad I_2=C'I_1-\frac{S'}{Z'\sqrt{-1}}V_1,$$

avec

$$(22)\quad C'=C+\frac{SW}{2\sqrt{-1}Z},$$

$$(23)\quad Z'=Z\sqrt{\frac{S\sqrt{-1}Z-\frac{W}{2}(1+C)}{S\sqrt{-1}Z+\frac{W}{2}(1-C)}}.$$

Les formules qui donnent V_2 et I_2 en fonction de V_1 et de I_1 sont celles qui conviendraient à une section du $11'$ au point $44'$ et qui serait homogène, avec une impédance caractéristique Z' et une constante de propagation a', la quantité a' étant définie par la condition

$$(24)\quad C'=\cos a'l\sqrt{-1},$$

ou, d'après (22),

$$(25)\quad \cos a'l\sqrt{-1}=\cos al\sqrt{-1}+\frac{\sin al\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\times\frac{W}{2Z};$$

or, si l est assez petit pour que l'on puisse mettre $\sqrt{-1}al$ pour $\sin al\sqrt{-1}$, il vient

$$(26)\quad \begin{cases} -4\sin^2\dfrac{a'l\sqrt{-1}}{2}=a^2l^2+al\dfrac{W}{Z} \\ \qquad =(\sigma+\omega\gamma\sqrt{-1})l[(\rho+\omega\lambda\sqrt{-1})l+W]. \end{cases}$$

Soit

$$(27)\quad W=R_0+L_0\omega\sqrt{-1}.$$

Posons

$$(28)\quad \rho_1=\rho+\frac{R_0}{l},\qquad \lambda_1=\lambda+\frac{L_0}{l}$$

Digitized by Google

et

$$a_1^2 = (\rho + \omega\gamma\sqrt{-1})(\rho_1 + \omega\lambda_1\sqrt{-1}), \tag{29}$$

alors a_1 sera la constante de propagation d'une ligne homogène qui aurait même perte σ et même capacité γ que la ligne considérée, et qui aurait pour résistance et pour inductance la résistance et l'inductance de la ligne considérée, augmentées d'une façon uniforme sur chaque section de la résistance et de l'inductance de chaque bobine de pupinisation, réparties ainsi sur la longueur correspondante à chacune d'elles.

On aurait formé de cette manière une ligne que nous appellerons la *ligne équivalente*.

Et l'on aurait

$$-4\sin^2\frac{a' l\sqrt{-1}}{2} = a_1^2 l^2. \tag{30}$$

Si de nouveau l est assez petit, on pourra écrire

$$a_1^2 l_2 = -4\sin^2\frac{a_1 l\sqrt{-1}}{2}, \tag{31}$$

et la comparaison des deux dernières équations montre que, dans ce cas, on aura

$$a' = a_1. \tag{32}$$

C'est-à-dire que la ligne pupinisée se comportera comme une ligne homogène ayant pour constantes les constantes de la ligne équivalente.

Posons

$$a_1 = \beta_1 + \alpha_1\sqrt{-1}, \tag{33}$$

l'onde

$$y = e^{-\beta_1 x} e^{(\omega t - \alpha_1 x)\sqrt{-1}} \tag{34}$$

se propagera avec la constante d'affaiblissement β_1, la période sera $T = \frac{2\pi}{\omega}$, la longueur d'onde $\lambda_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1}$.

Comme α_1 est plus grand que β_1, pour savoir si

$$\frac{a_1 l}{2}\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin a_1 l\sqrt{-1}}{2}$$

Digitized by Google

peuvent être confondus l'un avec l'autre, il suffira de comparer

$$\frac{\alpha_1 l}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\alpha_1 l}{2}.$$

Quand l'angle est de 30°, la différence est de 4,6 pour 100.

On a alors

$$\alpha_1 l = \frac{\pi}{3}. \tag{35}$$

Or, on a approximativement

$$\alpha_1 = \omega\sqrt{\lambda\gamma_1}, \tag{36}$$

d'où la valeur de l'équidistance (éq. 35 et 36) :

$$l = \frac{\pi}{3\omega\sqrt{\lambda\gamma_1}}. \tag{37}$$

On considère en téléphonie une fréquence telle que l'on ait

$$\frac{3\omega}{\pi} = 10000 \quad \text{ou} \quad 7000, \tag{38}$$

d'où

$$l = \frac{1}{10000\sqrt{\lambda\gamma_1}}. \tag{39}$$

Cette formule sert à déterminer l'équidistance.

Comme j'ai

$$6\alpha_1 l = 2\pi \quad \text{ou} \quad 6l = \frac{2\pi}{\alpha_1} = \lambda, \tag{35}$$

j'ai alors six bobines par longueur d'onde.

D'autre part, la vitesse de propagation d'une onde est $\omega : \alpha_1$, ou bien

$$v = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma_1}}; \tag{40}$$

d'où

$$\frac{v}{l} = 10000; \tag{41}$$

donc le front d'onde, aussi bien d'ailleurs que toute ondulation — car en ce cas la vitesse du front est la même que celle d'une ondulation dans le régime périodique permanent — rencontre 10000 bobines à la seconde.

Digitized by Google

En résumé, la propagation sur un circuit téléphonique dépend de deux constantes imaginaires :

la constante de propagation a (éq. 6),
la caractéristique Z (éq. 10).

Les formules (31) et (32) donnent le voltage et le courant au point x, quand on se donne la force électromotrice et l'impédance imaginaire Z_0 de la branche de départ et l'impédance Z_1 de la branche d'arrivée.

La théorie de la pupinisation prend une forme simple quand on cherche la ligne homogène qui est équivalente à une section coupée en son milieu par une bobine de pupinisation : les équations (22) et (23) donnant, l'une la constante de propagation de la ligne homogène avec laquelle on peut identifier la ligne équivalente et l'autre la caractéristique.

Enfin, j'ai indiqué les diverses manières d'énoncer les règles données par Pupin : la plus saisissante est peut-être celle qui dit que l'équidistance doit être assez petite pour que l'onde traverse 10 000 bobines à la seconde.

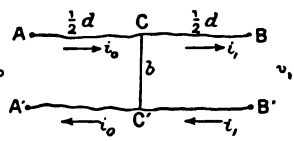
Si l'on représente la ligne téléphonique par une corde tendue chargée de poids, on préférera dire qu'il faut mettre les poids assez voisins les uns des autres pour qu'il s'en trouve de 6 à 12 par longueur d'onde.

CONSTANTES D'UNE LIGNE PUPINISÉE. LEUR DÉTERMINATION.

1° *Problème :*

Considérons la ligne en H représentée par le diagramme ci-dessous.

Fig. 37.



Supposons-la alimentée en AA′ sous le potentiel v_0 et soit v_1 le voltage aux bornes BB′. Appelons i_0 le courant qui entre par A et sort par A′, i_1 le courant qui entre par B′ et qui sort par B.

Le courant qui circule de C en C′ dans la branche b sera $i_0 - i_1$, et

Digitized by Google

si les quatre branches de l'H ont pour résistance $\frac{a}{2}$, on aura pour la chaleur de Joule en courant permanent

$$J = d i_0^2 + d i_1^2 + b(i_0 - i_1)^2 \tag{1}$$

et pour la puissance fournie

$$i_0 v_0 - i_1 v_1,$$

d'où les équations du système :

$$v_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i_0} = (d+b) i_0 - b i_1, \tag{2}$$

$$-v_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i_1} = (d+b) i_1 - b i_0. \tag{3}$$

Ces équations sont d'ailleurs valables en courant périodique permanent si l'on donne à d et à b des valeurs imaginaires de la forme $\rho + \lambda\omega\sqrt{-1}$, $\lambda\omega$ étant la réactance, ρ la résistance pour la fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ considérée.

2° Dans le cas d'une ligne homogène en courant périodique permanent, nous avons

$$V = V_0 C + \sqrt{-1}\, Z I_0 S, \tag{4}$$

$$\sqrt{-1}\, Z I = -V_0 S + \sqrt{-1}\, Z I_0 C. \tag{5}$$

La seconde équation peut s'écrire

$$V_0 = \sqrt{-1}\, Z \frac{C}{S} I_0 - \sqrt{-1}\, \frac{Z}{S} I. \tag{6}$$

En remplaçant V_0 par cette valeur dans l'expression de V, on obtient :

$$V = C\left[\sqrt{-1}\, Z \frac{C}{S} I_0 - \sqrt{-1}\, \frac{Z}{S} I\right] + \sqrt{-1}\, Z I_0 S \tag{7}$$

ou

$$-V = \sqrt{-1}\, Z \frac{C}{S} I - \sqrt{-1}\, \frac{Z}{S} I_0. \tag{8}$$

Comparons le système (6)(8) au système (2)(3), nous voyons que nous pouvons représenter une section de ligne homogène par une

Digitized by Google

combinaison ou ligne artificielle en H, à la condition de poser :

$$d + b = \sqrt{-1}\,Z\frac{C}{S}, \tag{9}$$

$$b = \sqrt{-1}\,\frac{Z}{S}; \tag{10}$$

d'où par différence

$$d = \sqrt{-1}\,\frac{Z}{S}(C-1). \tag{11}$$

Introduisons les lignes trigonométriques de l'arc moitié, on aura, en les désignant par de petites lettres au lieu de grandes :

$$d = -\sqrt{-1}\,Z\frac{s}{c} \tag{12}$$

et

$$\frac{1}{b} = \frac{2sc}{\sqrt{-1}\,Z} \tag{13}$$

ou

$$\frac{1}{b} = \frac{S}{\sqrt{-1}\,Z}. \tag{14}$$

REMARQUES SUR LA SIGNIFICATION DES SYMBOLES ET DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DES CONSTANTES ρ, γ, λ, σ.

1° *Signification de la caractéristique.* — On déduit de (4) et (5)

$$V_0 = VC - \sqrt{-1}\,ZIS, \tag{15}$$

$$\sqrt{-1}\,ZI_0 = VS + \sqrt{-1}\,ZIC. \tag{16}$$

Donc le rapport $\frac{V_0}{I_0}$ sera indépendant du rapport $\frac{V}{I}$ si l'on a

$$\frac{C}{S} = \frac{-\sqrt{-1}\,ZS}{\sqrt{-1}\,ZC}$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{-1}\,ZSC} = 0, \tag{17}$$

ce qui ne pourra avoir lieu que si la longueur l de la section est infinie.

Ainsi donc, quel que soit le point de la ligne où l'on se place pour mesurer $\frac{V_0}{I_0}$, si la ligne est infinie dans un sens, on mesurera la même

Digitized by Google

impédance et l'on aura toujours

$$\frac{V_0}{I_0} = Z. \tag{18}$$

C'est pour cette raison que Z s'appelle l'impédance caractéristique ou tout simplement la caractéristique (pour la fréquence envisagée).

2° Nous pouvons maintenant faire deux expériences, boucler la ligne à son extrémité ou en laisser les deux brins isolés; si nous mesurons l'impédance imaginaire au départ, dans l'un des cas, nous aurons l'impédance de court-circuit $Z_{(0)}$; dans l'autre cas, l'impédance d'isolement $Z_{(\infty)}$.

Impédance d'isolement. — Faisons $I = 0$, l'équation (4) donne

$$\frac{V_0}{I_0} = \frac{\sqrt{-1}\,ZC}{S}$$

ou

$$Z_{(\infty)} = +\sqrt{-1}\,\frac{ZC}{S}. \tag{19}$$

Impédance de court-circuit. — Faisons $V = 0$, l'équation (4) donne

$$\frac{V_0}{I_0} = \frac{-\sqrt{-1}\,ZS}{C}$$

ou

$$Z_{(0)} = \frac{-\sqrt{-1}\,ZS}{C}, \tag{20}$$

ce qui donne

$$Z_{(0)} Z_{(\infty)} = Z^2,$$

$$\sqrt{\frac{Z_{(0)}}{Z_{(\infty)}}} = \pm\sqrt{-1}\,\frac{S}{C};$$

d'où

$$Z = \sqrt{Z_{(0)} Z_{(\infty)}} \tag{21}$$

et

$$\frac{e^{al} - e^{-al}}{e^{al} + e^{-al}} = \pm\sqrt{\frac{Z_{(0)}}{Z_{(\infty)}}};$$

la constante de propagation a est susceptible d'une double détermination, puisqu'elle est connue par son carré.

Digitized by Google

Prenons le signe qui, pour $\omega = 0$, réduit a à $\sqrt{\rho\sigma}$. Alors, pour l infini, le premier membre se réduit à l'unité, $Z_{(0)}$ et $Z_{(\infty)}$ tendant vers Z. Il faut donc prendre le signe + devant le radical pour que le second membre soit, lui aussi, égal à l'unité.

Résolvons par rapport à e^{2al} et prenons les logarithmes, il vient :

$$al = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{\frac{Z_{(0)}}{Z_{(\infty)}}}}{1-\sqrt{\frac{Z_{(0)}}{Z_{(\infty)}}}}. \tag{22}$$

Les équations (21) et (22) permettent de tirer de l'expérience les valeurs de Z et de a, donc celles de

$$Za \quad \text{et} \quad \frac{a}{Z},$$

c'est-à-dire de

$$\rho + \omega\lambda\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \sigma + \omega\gamma\sqrt{-1}$$

et par suite des constantes spécifiques de la ligne.

SIGNIFICATION DES CONSTANTES DE LA LIGNE EN H ÉQUIVALENTE A UNE LIGNE HOMOGÈNE.

En comparant les équations (12) et (20)

$$Z_{(0)} = -\frac{\sqrt{-1}\,ZS}{C} \quad \text{et} \quad d = -\sqrt{-1}\,Z\frac{s}{c},$$

on voit que d est l'impédance imaginaire au départ pour une ligne de longueur $\frac{l}{2}$ (au lieu de l), bouclée à son extrémité.

Appelons d' l'impédance imaginaire d'isolement de la ligne de longueur moitié.

Comme la caractéristique de la ligne $\frac{l}{2}$ est la même que celle de la ligne de longueur l, on aura évidemment :

$$d'd = Z^2,$$

d'où

$$d' = \sqrt{-1}\,Z\frac{s}{c}. \tag{23}$$

Si nous tenons compte de la valeur (13) de b, nous obtiendrons

Digitized by Google

aisément :

(24) $$d = Z_{(\infty)} - b,$$

(25) $$d' = Z_{(\infty)} + b.$$

Il suffit de remplacer $Z_{(\infty)}$ et b par leurs valeurs (19) et (10) pour faire la vérification, qui est immédiate.

AUTRE FORME DES ÉQUATIONS RELATIVES A UNE LIGNE HOMOGÈNE.

Au lieu de prendre comme inconnues V et I, les données étant V_0 et I_0, on peut prendre V et V_0 et l'on a :

$$V_0 = \sqrt{-1}\frac{ZC}{S} I_0 - \frac{\sqrt{-1}Z}{S} I,$$

$$-V = \sqrt{-1}Z\frac{C}{S} I - \frac{\sqrt{-1}Z}{S} I_0$$

ou, avec les notations précédemment introduites :

(26) $$V_0 = Z_{(\infty)} I_0 - bI,$$

(27) $$V = bI_0 - Z_{(\infty)} I.$$

LIGNE PUPINISÉE.

Nous supposons que les bobines de pupinisation sont placées à une distance l les unes des autres successivement; de plus, admettons que la première et la dernière bobines sont plus petites que les autres de moitié.

Ainsi, on a un certain nombre de sections égales de longueur l. A l'extrémité et au commencement de chaque section, on a une demi-bobine de pupinisation.

En vertu de cette symétrie, la ligne composée ainsi de tronçons égaux peut être remplacée par une ligne homogène de même longueur, lorsqu'il s'agit de courants et de tensions hors de la ligne. Il s'agit d'en déterminer les constantes.

Cette ligne homogène est dite *la ligne électriquement équivalente*.

J'appelle $z = l(\rho_0 + \omega\lambda_0\sqrt{-1})$ l'impédance imaginaire d'une bobine de pupinisation.

A l'extrémité de chaque section, j'ai donc une résistance *opérateur* (selon l'expression de M. H. Pleijel) égale à $\frac{1}{2}z$.

Digitized by Google

Pour une section de longueur l flanquée de deux demi-bobines, j'aurai, au lieu des équations (26) et (27), les équations :

$$V_0 = \left(Z_{(\infty)} + \frac{z}{2}\right) I_0 - b I, \tag{28}$$

$$V = b I_0 - \left(Z_{(\infty)} + \frac{z}{2}\right) I. \tag{29}$$

Pour justifier ces formules, il suffit d'observer que le voltage l'origine de la ligne homogène est venu

$$V_0 - \frac{z}{2} I_0$$

et que le voltage à son extrémité est devenu

$$V_0 + \frac{z}{2} I.$$

Je considère la ligne en H équivalente à la section de ligne pupinisée, comprenant la longueur l de ligne, et de chaque côté une demi-bobine.

J'appelle d_1 et b_1 les constantes de cette ligne en H, j'aurai alors :

$$V_0 = (d_1 + b_1) I_0 - b_1 I, \tag{30}$$

$$V = b_1 I_0 - (d_1 + b_1) I. \tag{31}$$

L'assimilation des équations (28) (29) et (30) (31) donne :

$$d_1 + b_1 = Z_{(\infty)} + \frac{z}{2}, \tag{32}$$

$$b_1 = b. \tag{33}$$

Nous savons que d_1 est l'impédance imaginaire de la ligne bouclée à son extrémité.

Pour pouvoir appliquer les formules connues qui donnent la constante de propagation et la caractéristique, il faudrait avoir en outre l'impédance d'isolement d'_1.

Or on a, d'après (32) et (33),

$$d_1 = Z_{(\infty)} + \frac{z}{2} - b$$

ou, d'après (24),

$$d_1 = d + \frac{z}{2}. \tag{34}$$

Digitized by Google

Puis, d'après (25),

$$d'_1 = Z_{(\infty)} + \frac{z}{2} + b$$

ou

$$d'_1 = d_1 + 2b_1 = d_1 + 2b = d + \frac{z}{2} + 2b. \tag{35}$$

On aura donc, pour la ligne pupinisée, en appelant ρ_1, λ_1, σ_1, γ_1 les constantes de la ligne homogène électriquement équivalente et a_1 sa constante de propagation :

$$a_1 l = \log \frac{1 + \sqrt{\frac{d_1}{d'_1}}}{1 - \sqrt{\frac{d_1}{d'_1}}}, \tag{36}$$

$$\sqrt{\frac{\rho_1 + \omega\lambda_1\sqrt{-1}}{\sigma_1 + \omega\gamma_1\sqrt{-1}}} = \sqrt{d_1 d'_1}. \tag{37}$$

ÉTUDE DES CONSTANTES b ET d DE LA LIGNE ÉQUIVALENTE A LA LIGNE HOMOGÈNE AVANT SA PUPINISATION.

Posons, avec M. Pleijel :

$$d = (\rho' + \omega\lambda'\sqrt{-1})\frac{l}{2}, \tag{38}$$

$$\frac{1}{b} = (\sigma' + \omega\gamma'\sqrt{-1})\, l. \tag{39}$$

Quelle relation y a-t-il entre ces constantes ρ', λ', σ', γ' et les constantes ρ, λ, σ, γ de la ligne primitive?

Nous avons

$$d = -\sqrt{-1}\, Z \frac{s}{c} = -\sqrt{-1}\, Z \operatorname{tang} \frac{1}{2} a l \sqrt{-1}. \tag{40}$$

Or une formule connue, simple application de la série de Mac Laurin, donne :

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{4x^3}{12} + \frac{16x^5}{120} + \dots$$

ou

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a l \sqrt{-1} = \frac{1}{2} a l \sqrt{-1} \left(1 - \frac{a^2 l^2}{12} + \frac{a^4 l^4}{120} + \dots\right) \tag{41}$$

mais on a :

$$aZ = (\rho + \omega\lambda\sqrt{-1}),$$

$$\frac{a}{Z} = (\sigma + \omega\gamma\sqrt{-1});$$

Digitized by Google

d'où

$$(42)\qquad d=(\rho'+\omega\lambda'\sqrt{-1})\frac{l}{2}=(\rho+\omega\lambda\sqrt{-1})\frac{l}{2}\left(1-\frac{a^2l^2}{12}+\frac{a^4l^4}{120}-\dots\right);$$

puis

$$(43)\qquad \frac{1}{b}=\frac{S}{\sqrt{-1}Z}=\frac{\sin al\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}Z},$$

d'où

$$(44)\qquad \frac{1}{b}=(\sigma'+\omega\gamma'\sqrt{-1})\,l=(\sigma+\omega\gamma\sqrt{-1})\,l\left(1+\frac{a^2l^2}{6}+\frac{a^4l^4}{120}+\dots\right).$$

Faisons tendre l vers zéro, on voit que ρ', λ', σ', γ' tendront vers ρ, σ, λ, γ.

Si donc on pouvait négliger la durée de propagation le long d'un tronçon de longueur l, les constantes accentuées ne seraient autres que les constantes de la ligne.

Revenons maintenant aux constantes d_1 et d'_1 de la ligne électriquement équivalente à la ligne pupinisée.

Nous aurons, d'après (34) et (35),

$$(45)\qquad d_1=\frac{z}{2}+(\rho'+\omega\sqrt{-1}\lambda')\frac{l}{2},$$

$$(46)\qquad d'_1=\frac{1+\left[\frac{z}{2}+(\rho'+\omega\sqrt{-1}\lambda')\frac{l}{2}\right]\times(\sigma'+\omega\gamma'\sqrt{-1})\times\frac{l}{2}}{(\sigma'+\omega\gamma'\sqrt{-1})\frac{l}{2}}.$$

Introduisons le symbole

$$(47)\qquad \delta=a'\frac{l}{2}=\sqrt{\left[\rho_0+\rho'+\omega\sqrt{-1}(\lambda_0+\lambda')\right](\sigma'+\omega\gamma'\sqrt{-1})}\times\frac{l}{2}.$$

a' est la constante de propagation sur la ligne que j'appellerai *physiquement* équivalente à la ligne $(\rho'\sigma'\lambda'\gamma')$ pupinisée, parce que la résistance et l'inductance des bobines de pupinisation y ont été également réparties.

On aura alors

$$\frac{d_1}{d'_1}=\frac{\delta^2}{1+\delta^2}$$

et par suite

$$(48)\qquad a_1l=\log\frac{1+\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}}{1-\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}.$$

Digitized by Google

C'est cette équation qui déterminera

$$a_1 = \beta_1 + \alpha_1\sqrt{-1}. \tag{49}$$

En résumé les équations fondamentales sont les équations (21) et (22)

$$Z = \sqrt{Z_{(0)}\,Z_{(\infty)}},$$

$$a\,l = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{\frac{Z_{(0)}}{Z_{(\infty)}}}}{1-\sqrt{\frac{Z_{(0)}}{Z_{(\infty)}}}}.$$

Puis, considérant la ligne en H équivalente à la ligne pupinisée, nous avons obtenu les équations (28) et (29).

Les équations (34) et (35) donnent les constantes de cette ligne.

Les équations (36) et (37) en déduisent la caractéristique et la constante de propagation.

La formule (48) détermine cette constante en fonction de δ.

Et δ a une expression simple (équation 47) en fonction de la ligne homogène « accentuée » sur laquelle on aurait étendu uniformément la résistance et l'inductance des bobines.

CALCUL DE LA CONSTANTE D'AFFAIBLISSEMENT β_1 DE LA LIGNE PUPINISÉE (PLEIJEL).

Je pose

$$a_1 = \beta_1 + a_1\sqrt{-1}.$$

C'est la partie réelle de a_1 qu'il faut avoir.

Mettant en évidence les modules et les arguments, j'écris

$$\delta = \delta_0 e^{\varphi\sqrt{-1}}, \qquad n = \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} = n_0 e^{\psi\sqrt{-1}}, \tag{50}$$

et j'ai

$$\beta_1 l = \log \operatorname{mod}\frac{1+n}{1-n} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{2n_0\cos\psi}{1+n_0^2}}{1-\frac{2n_0\cos\psi}{1+n_0^2}}. \tag{51}$$

Je dis que lorsque la distance des bobines est assez petite pour que l'on ait

$$\delta_0 < 1,$$

Digitized by Google

l'angle ψ est à peu près de 90° et que la quantité

$$\frac{2 n_0 \cos \psi}{1 + n_0^2}$$

est petite, ce qui permet le développement en série du logarithme.

Je pose

$$1 + \delta_0^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}} = U e^{u\sqrt{-1}}. \tag{52}$$

Pour commencer, faisons abstraction des changements que subissent ρ', λ', σ', γ' quand la distance l entre les bobines augmente.

Pour une pulsation ω donnée, φ d'après la formule (47) reste donc constant, tandis que δ_0 augmente proportionnellement à l.

Plaçons-nous dans le cas d'une ligne fortement chargée, alors l'angle φ se rapproche sensiblement de 90°.

On a, d'après (52),

$$\operatorname{tang} u = \frac{\delta_0^2 \sin 2\varphi}{1 + \delta_0^2 \cos 2\varphi}.$$

Si φ est voisin de 90°, 2φ est voisin de 180° et l'on aura sensiblement

$$\operatorname{tang} u = \frac{\delta_0^2 \sin 2\varphi}{1 - \delta_0^2},$$

$\sin 2\varphi$ étant une quantité très petite.

L'angle u pour $\delta_0 < 1$ est donc sensiblement égal à 0.

Quand δ_0 se rapproche de l'unité, l'angle u commence à grandir, et sa valeur s'élève subitement jusqu'à 90° pour δ_0 égal sensiblement à l'unité. Quand δ_0 augmente encore, l'angle u croît progressivement jusqu'à 180.

Par conséquent, lorsque δ_0 dépasse l'unité, l'angle u augmente subitement depuis zéro jusqu'à 180°, variation qui se trouve dans un très petit espace pour δ_0 et par conséquent pour l.

En même temps, comme l'on a

$$\frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} = \frac{\delta_0 e^{\varphi\sqrt{-1}}}{\sqrt{U}\, e^{\frac{u}{2}\sqrt{-1}}} = u_0 e^{\psi\sqrt{-1}},$$

l'angle ψ qui a pour valeur

$$\psi = \varphi - \frac{u}{2}$$

Digitized by Google

après être resté voisin de 90°, diminue subitement jusqu'à zéro; et $\cos\psi$, après avoir été sensiblement égal à zéro immédiatement avant le point critique, augmente subitement jusqu'à une valeur voisine de l'unité.

Supposons les bobines suffisamment rapprochées, alors on aura $\delta_0 < 1$ et $\cos\psi$ sera voisin de zéro.

On pourra donc, dans (51), développer en série les logarithmes, et en s'arrêtant au premier terme, il viendra

$$\beta_1 = \frac{1}{l}\,\frac{2n_0}{1+n_0^2}\cos\psi. \tag{53}$$

Telle est donc la formule que nous avons à calculer.

Il faut calculer n_0 et ψ.

Or, d'après (52), on a

$$\begin{cases} U\cos u = 1 - \delta_0^2\cos 2\varphi, \\ U\sin u = \delta_0^2\sin 2\varphi, \end{cases} \tag{54}$$

d'où

$$U = \sqrt{(1-\delta_0^2)^2 + 4\delta_0^2\cos^2\varphi}. \tag{55}$$

Les équations (50) donnent

$$n_0 = \frac{\delta_0}{\sqrt{U}} \qquad \text{et} \qquad \frac{n_0}{1+n_0^2} = \frac{\delta_0\sqrt{U}}{U+\delta_0^2}.$$

D'autre part, on a

$$\psi = \varphi - \frac{u}{2}, \tag{56}$$

d'où

$$2\cos^2\psi = \cos 2\psi + 1 = 1 + \cos(2\varphi - u) = 1 + \cos 2\varphi\cos u + \sin 2\varphi\sin u.$$

Utilisons (54), il vient

$$2\cos^2\psi = 1 + \frac{\cos 2\varphi + \delta_0^2}{U}$$

ou

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{U+\delta_0^2+\cos 2\varphi}{U}}.$$

L'expression

$$U + \delta_0^2 + \cos 2\varphi = \sqrt{(1-\delta_0^2)^2 + 4\delta_0\cos^2\varphi} + \delta_0^2 + 2\cos^2\varphi - 1$$

comporte un radical; multiplions et divisons par l'expression con-

Digitized by Google

juguée, nous obtenons aisément

$$U + \delta_0^2 + \cos 2\varphi = \frac{4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{U + 1 - \delta_0^2 - 2\cos^2\varphi},$$

d'où

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{U}}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{U + 1 - \delta_0^2 - 2\cos^2\varphi}} \tag{57}$$

et

$$\frac{2n_0\cos\psi}{1 + n_0^2} = \frac{2\delta_0}{U + \delta_0^2}\sqrt{2}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{U + 1 - \delta_0^2 - 2\cos^2\varphi}}. \tag{58}$$

Si δ_0 reste au-dessous de la zone critique, on peut écrire

$$U = 1 - \delta_0^2, \qquad \cos^2\varphi = 0, \qquad \sin\varphi = 1.$$

Comme on a

$$\delta = \frac{l}{2}\sqrt{[\rho_0 + \rho' + \omega(\lambda_0 + \lambda')\sqrt{-1}]\,(\sigma' + \omega\gamma'\sqrt{-1})}, \tag{47}$$

le radical peut être considéré comme la constante de propagation de la ligne physiquement équivalente à la ligne caractérisée par les constantes ρ', λ', σ', γ' sur laquelle seraient intercalées les bobines (ρ_0, λ_0).

Appelons β' la constante d'atténuation ou d'affaiblissement de cette ligne équivalente, β' sera la partie réelle de l'expression représentée par le radical.

En prenant les parties réelles des deux membres de (47), on a donc

$$\delta_0\cos\varphi = \frac{l}{2}\beta'; \tag{59}$$

et la formule (53), si l'on tient compte de (59) et de (58), devient

$$\beta_1 = \frac{1}{l}\,\frac{2n_0}{1 + n_0^2}\cos\psi = \frac{1}{l}\,\frac{2\sqrt{2}\,\delta_0\cos\varphi}{(1 - \delta_0^2 + \delta_0^4)\sqrt{2(1 - \delta_0^2)}} = \frac{\beta'}{\sqrt{1 - \delta_0^2}}. \tag{60}$$

La formule (60) résout le problème que nous nous étions posé, puisque β' et δ, donc δ_0, sont connus en fonction de $\rho_0\lambda_0$ et de $\rho'\lambda'\sigma'\gamma'$, dont on a les développements en fonction de $\rho\lambda\sigma\gamma$. Cependant nous allons chercher la formule dans laquelle entrent ρ, λ, σ, γ à l'exclusion de ρ', λ', σ', γ'; mais nous ne ferons ce calcul que dans le cas où la pupinisation est appliquée à un câble.

Pour un câble, σ, la perte, est petite devant $\omega\gamma$, la capacitance; de

Digitized by Google

même, $\omega\lambda$ la réactance due au champ magnétique est petite devant ρ, la résistance.

Reportons-nous aux équations (42) et (44).

Si l'on se borne aux termes en l^2, il vient

$$(61)\quad \begin{cases} \rho' = \rho - \frac{1}{12}(\rho^2\sigma - 2\omega^2\lambda\gamma\rho - \omega^2\lambda^2\sigma)l^2, \\ \lambda' = \lambda - \frac{1}{12}(2\sigma\rho\lambda - \omega^2\lambda^2\gamma + \rho^2\gamma)l^2, \\ \gamma' = \gamma + \frac{1}{6}(2\sigma\rho\gamma - \omega^2\lambda\gamma^2 + \sigma^2\lambda)l^2, \\ \sigma' = \sigma + \frac{1}{6}(\rho\sigma^2 - 2\omega^2\lambda\gamma\rho - \omega^2\gamma^2\rho)l^2. \end{cases}$$

Dans un câble, il reste donc

$$(62)\quad \begin{cases} \rho' = \rho, \\ \lambda' = \lambda - \frac{1}{12}\rho^2\gamma l^2, \\ \gamma' = \gamma, \\ \sigma' = \sigma - \frac{1}{6}\omega^2\gamma^2\rho l^2. \end{cases}$$

D'ailleurs on a, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire,

$$(63)\quad \left(\frac{\delta}{\frac{l}{2}}\right)^2 = (\beta' + \alpha'\sqrt{-1})^2 = (\sigma' + \omega\gamma'\sqrt{-1})\left|\rho' + \rho_0 + \omega(\lambda' + \lambda_0)\sqrt{-1}\right|$$

ou

$$(64)\quad -\alpha'^2 + \beta'^2 = \sigma'(\rho' + \rho_0) - \omega^2\gamma'(\lambda' + \lambda_0),$$

$$(65)\quad 2\alpha'\beta' = \omega[\sigma'(\lambda' + \lambda_0) + \gamma'(\rho' + \rho_0)].$$

Comme β' est une petite quantité et que σ' est petit devant γ', de même que $\rho' + \rho_0$ est petit devant $\lambda' + \lambda_0$, la première équation (64) donne

$$(66)\quad \alpha' = \omega\sqrt{\gamma'(\lambda' + \lambda_0)},$$

et la seconde donne

$$(67)\quad \beta' = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma'(\lambda' + \lambda_0)}\left(\frac{\rho' + \rho_0}{\lambda' + \lambda_0} + \frac{\sigma'}{\gamma'}\right).$$

Comme λ est négligeable devant λ_0, il vient simplement

$$(68)\quad \beta' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_0}}\left[\rho + \rho_0 + \lambda_0\left(\frac{\sigma}{\gamma} - \frac{1}{6}\omega^2\gamma\rho l^2\right)\right].$$

Digitized by Google

On peut aussi prendre par approximation, en négligeant β'^2, d'après (63) et (66),

$$\delta_0^2 = \omega^2 \gamma_1 \lambda_0 \frac{l^2}{4},$$

et il reste

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma_1}{\lambda_0}}\,\frac{\rho\left(1-\frac{2}{3}\delta_0^2\right)+\rho_0+\lambda_0\frac{\sigma}{\gamma_1}}{\sqrt{1-\delta_0^2}}. \tag{69}$$

C'est la formule que nous nous proposions d'établir. Pour le surplus de la discussion, je ne puis que renvoyer au Mémoire de M. Pleijel.

On voit que si l était assez petit pour qu'on pût négliger les termes en l^2, et si l'isolement était parfait on aurait

$$\beta' = \frac{1}{2}(\rho+\rho_0)\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_0}}. \tag{70}$$

Mais β' diffère de cette valeur, dès que la perte σ n'est plus négligeable ou que l'équidistance l n'est pas très petite, et le terme correctif prend d'autant plus d'importance que la ligne est plus chargée, c'est-à-dire que λ_0 est plus grand.

Cette valeur (70) de β' est celle qu'on attribuerait à la constante d'atténuation du câble, si l'on admettait que son inductance λ_0 est uniquement celle des bobines et que sa résistance fût augmentée de celle des bobines, l'isolement étant pratiquement excellent.

Dès que ces hypothèses ne sont plus absolument correctes, le coefficient d'affaiblissement β_1 diffère de la valeur ainsi calculée.

D'abord on a

$$\beta_1 = \frac{\beta'}{\sqrt{1-\delta_0^2}},$$

et β' a une valeur plus compliquée, dans laquelle l'isolement joue un rôle important.

Quand cet isolement est élevé, la résistance apparente de la ligne est $\rho\left(1-\frac{2}{3}\delta_0^2\right)$, et par suite l'introduction des bobines de pupinisation amène une certaine compensation : elles ajoutent leur résistance, mais celle de la ligne est un peu diminuée.

Digitized by Google

CHAPITRE XIII.

CALCUL SYMBOLIQUE. COEFFICIENTS DE RÉFLEXION. PROPAGATION DU COURANT SUR UN CABLE. DÉVELOPPEMENT D'HEAVISIDE.

Dans ce Chapitre, je me propose de donner un aperçu des méthodes d'Heaviside, en regrettant de ne les avoir connues que depuis trop peu de temps pour les honorer dignement.

Je commence par traiter le cas de la propagation du courant sur un câble sous-marin, dans l'hypothèse très simple où le câble est à la terre à son extrémité, tandis qu'à l'époque initiale on introduit brusquement à son origine une source d'électricité de force électromotrice constante, sans résistance intérieure.

Je donne ensuite l'expression des coefficients de réflexion, qui sont le rapport de l'onde réfléchie à l'onde incidente, quand une onde en se propageant, passe, par exemple, d'un câble ayant une résistance R sur une ligne ayant une caractéristique Z.

Dans le cas où les caractéristiques sont les mêmes, les ondes continuent à se propager sans réflexion au point de jonction.

C'est la raison physique pour laquelle, dans ce cas, les exposants d'affaiblissement βl et $\beta' l'$ s'ajoutent purement et simplement.

Je passe au cas où l'on communique une charge Q en un point donné d'un câble de longueur finie, terminé de part et d'autre par des réseaux plus ou moins complexes dont l'influence est représentée tout simplement par des coefficients de réflexion déterminés.

Deux cas particuliers sont surtout intéressants : celui où les deux extrémités du câble sont mises à la terre et celui où elles sont isolées.

Or, ce problème physique a un intérêt analytique considérable, qui nous l'a fait choisir : c'est qu'on en déduit immédiatement, sans autre calcul, la série de Fourier.

Je donne ensuite une démonstration du théorème du développement d'Heaviside, avec une application simple et quelques réflexions

Digitized by Google

sur le cas où ce développement devient une série dont le nombre de termes est infini.

MÉTHODES D'HEAVISIDE. CABLE SOUS-MARIN.

Soient V et I le voltage et l'intensité en un point d'un câble.

On a, R et C étant la résistance et la capacité par unité de longueur,

$$(1) \qquad -\frac{\partial V}{\partial x} = RI, \qquad -\frac{\partial I}{\partial x} = C\frac{\partial V}{\partial t}.$$

J'écris $\frac{\partial}{\partial t} = p$, j'aurai, symboliquement,

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RCpV.$$

Je pose

$$(3) \qquad RCp = q^2,$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = q^2 V \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = q^2 I.$$

Je traite q comme une quantité algébrique. J'ai pour solution symbolique

$$(5) \qquad V = \varepsilon^{qx} A + \varepsilon^{-qx} B,$$

ε étant le symbole de l'exponentielle. A et B sont indépendants de x.

La fonction

$$(6) \qquad V = V_0 e^{-qx},$$

où V_0 est la force électromotrice donnée, variable avec le temps, à l'origine de la ligne sera une solution pour un câble de longueur infinie, car à l'infini on aura $V = 0$, si le signe de q donné par (3) est convenablement choisi. Cette expression peut être considérée comme celle d'une onde qui se propage vers les x positifs. La vitesse de propagation est, à vrai dire, infinie, parce qu'on a négligé la self-inductance. On peut néanmoins envisager le cas de l'instantanéité comme le cas limite d'une vitesse très grande.

Supposons alors la ligne AB de longueur l.

Mettons les deux bouts à la terre. Intercalons à l'origine la force

Digitized by Google

électromotrice e dont un pôle est à la terre, l'autre pôle à la ligne, et dont la résistance intérieure est nulle.

Nous avons alors la première onde

$$V_1 = e\varepsilon^{-qx} \tag{7}$$

qui arrive à l'extrémité avec la valeur

$$V_1^{(l)} = e\varepsilon^{-ql}.$$

Comme en ce point le voltage doit être nul, il naît une onde

$$V_2 = -e\varepsilon^{-ql}e^{-q(l-x)} \tag{8}$$

telle que pour $x = l$ on ait $V_1 + V_2 = 0$, et qui se propage dans le sens BA. Cette onde arrive à l'origine A avec la valeur

$$V_2^{(0)} = -e\varepsilon^{-2ql}. \tag{9}$$

Le voltage au lieu d'être e serait donc $e + V_2^{(0)}$, il naîtra donc une onde V_3 d'intensité initiale $-V_2^{(0)}$ se dirigeant de A vers B,

$$V_3 = e\varepsilon^{-q2l}\varepsilon^{-qx} \tag{10}$$

sur laquelle on pourra recommencer les mêmes raisonnements que sur V_1. On aura donc une série d'ondes, dont la somme constituera l'onde réelle, et celle-ci V aura pour valeur

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots \tag{11}$$

ou

$$V = e(\varepsilon^{-qx} - \varepsilon^{-q(2l-x)} + \varepsilon^{-q(2l+x)} - \varepsilon^{-q(4l-x)} + \varepsilon^{-q(4l+x)} + \dots). \tag{12}$$

L'intensité du courant correspondant sera donnée par

$$RI = -\frac{\partial V}{\partial x} = e(q\varepsilon^{-qx} + q\varepsilon^{-q(2l-x)} + q\varepsilon^{-q(2l+x)} + \dots). \tag{13}$$

Nous pouvons effectuer la sommation : il vient

$$V = e\frac{e^{-qx} - \varepsilon^{-q(2l-x)}}{1 - \varepsilon^{-2ql}} = e\frac{\operatorname{sh} q(l-x)}{\operatorname{sh} ql}. \tag{14}$$

PASSAGE DU CALCUL SYMBOLIQUE AU CALCUL ALGÉBRIQUE.

Supposons, pour simplifier, que e est constante et introduite à l'époque $t = 0$.

Digitized by Google

Voici comment on peut opérer, d'après Heaviside, pour avoir l'expression algébrique de la formule symbolique précédente.

Partons de la formule trigonométrique connue :

$$\frac{ql}{\operatorname{sh} ql} = 1 - \frac{2}{1+\left(\frac{\pi}{ql}\right)^2} + \frac{2}{1+\left(\frac{2\pi}{ql}\right)^2} - \frac{2}{1+\left(\frac{3\pi}{ql}\right)^2} + \dots \tag{15}$$

Ici, q^2 signifie le symbole RCp [formule (3)].

Il s'agit donc d'avoir l'expression algébrique de

$$\frac{1}{1+\frac{P}{p}},$$

quand P est une constante.

Mais on a

$$\frac{1}{1+\frac{P}{p}} = 1 - Pp^{-1} + P^2p^{-2} + - P^3p^{-3} + \dots \tag{16}$$

Or, on a

$$p^{-1}p = 1, \qquad p = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{17}$$

d'où, en appelant 1 une fonction égale à zéro pour t négatif et égale à l'unité depuis $t = 0$ jusqu'à t infini,

$$p^{-1}1 = \int_0^t dt = t;$$

$$p^{-2}1 = \int_0^t p^{-1}1\,dt = \frac{t^2}{1.2}; \tag{18}$$

$$p^{-3}1 = \int_0^t p^{-2}1\,dt = \frac{t^3}{1.2.3}; \tag{19}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

d'où

$$\frac{1}{1+\frac{P}{p}} = \varepsilon^{-Pt} \tag{20}$$

et

$$\frac{ql}{\operatorname{sh} ql}e = e(1 - 2\varepsilon^{p_1 t} + 2\varepsilon^{p_2 t} - 2\varepsilon^{p_3 t} + \dots) \tag{21}$$

avec

$$p_n = -\frac{n^2\pi^2}{RCl^2}. \tag{22}$$

Digitized by Google

Pour avoir V multiplions par

$$\frac{\operatorname{sh} q(l-x)}{ql}.$$

Mais ce multiplicateur est une fonction entière de q^2, qui par suite n'implique que des dérivations.

Mais on a

$$p\varepsilon^{Pt} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^{Pt} = P\varepsilon^{Pt}. \tag{23}$$

Donc, si $f(p)$ est une fonction entière de l'opérateur p agissant sur ε^{Pt}, on aura

$$f(p)\varepsilon^{Pt} = f(P)\varepsilon^{Pt}. \tag{24}$$

Désignons par q_1, q_2, ... les valeurs de q correspondant aux diverses valeurs de P. On aura aussi pour q_0 la valeur zéro; d'où

$$V = e\left[\left(1-\frac{x}{l}\right) - 2\frac{\operatorname{sh} q_1(l-x)}{q_1 l}\varepsilon^{P_1 t} + 2\frac{\operatorname{sh} q_2(l-x)}{q_2 l}\varepsilon^{P_2 t} + \dots\right]. \tag{25}$$

Comme les valeurs de q^2 sont négatives, posons

$$q^2 = -s^2, \tag{26}$$

il vient

$$V = e\left[\left(1-\frac{x}{l}\right) - 2\frac{\sin s_1(l-x)}{s_1 l}\varepsilon^{P_1 t} + 2\frac{\sin s_2(l-x)}{s_2 l}\varepsilon^{P_2 t} - \dots\right] \tag{27}$$

et, puisque l'on a, pour les diverses valeurs de s,

$$\sin sl = 0, \tag{28}$$

il reste

$$V = e\left[\left(1-\frac{x}{l}\right) - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\varepsilon^{-\frac{n^2\pi^2}{CRl^2}t}\right]. \tag{29}$$

COEFFICIENTS DE RÉFLEXION.

Les équations du mouvement de l'électricité sont

$$\left(p = \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = (R + Lp)I$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = (S + Cp)V$$

Digitized by Google

d'où

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = q^2 V \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = q^2 I,$$

en posant

$$q^2 = (R + Lp)(S + Cp).$$

La solution générale est la somme de deux ondes de la forme

$$V_0 \varepsilon^{-qx}, \quad V_0 \varepsilon^{qx}$$

se propageant en sens inverse.

Si l'on pose

$$v_1 = V_0 \varepsilon^{-qx}$$

et

$$Z = \sqrt{\frac{R + Lp}{S + Cp}},$$

on aura

$$i_1 = -\frac{1}{R + Lp}\frac{dv_1}{dx} = q\frac{1}{R + Lp} V_0 \varepsilon^{-qx}$$

ou

$$i_1 = \frac{v_1}{Z}.$$

En posant

$$v_2 = V_0 \varepsilon^{qx}$$

j'obtiendrais

$$i_2 = -\frac{v_2}{Z},$$

tout cela symboliquement.

Cela posé, supposons qu'une onde v_1 se propage vers la droite et arrive à l'extrémité l de la ligne homogène, celle-ci se trouvant prolongée par un réseau dont l'impédance opérateur soit Z_1, il naîtra une onde v_2 rétrograde, telle qu'à l'extrémité de la ligne on ait, en appelant I le courant en ce point, pour le voltage résultant $v_1 + v_2$, la valeur

$$v_1 + v_2 = Z_1 I \qquad (\text{pour } x = l). \tag{30}$$

Mais, d'autre part, on a

$$I = i_1 + i_2 \qquad (\text{pour } x = l),$$

c'est-à-dire

$$v_1 - v_2 = ZI \qquad (\text{pour } x = l); \tag{31}$$

d'où, par division,

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} = \frac{Z}{Z_1};$$

Digitized by Google

or, en appelant β le coefficient de réflexion, on écrira

$$v_2 = \beta v_1, \tag{32}$$

d'où

$$\beta = \frac{1 - \frac{Z}{Z_1}}{1 + \frac{Z}{Z_1}}, \tag{33}$$

symboliquement.

Dans le cas particulier de $Z = Z_1$, il n'y a pas de réflexion.

Dans tous les autres cas, il y en a un, β, qui est donné par la formule ci-dessus.

Ce β est un opérateur.

Si nous avons affaire à des courants périodiques de pulsation ω, on aura pour les diverses grandeurs électriques des expressions de la forme

$$z = A e^{\omega t \sqrt{-1}},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} A e^{\omega t \sqrt{-1}} = \omega \sqrt{-1}\, A e^{\omega t \sqrt{-1}},$$

ou

$$p z = \omega \sqrt{-1}\, z,$$

ce qui indique la valeur algébrique à donner au facteur symbolique p. On a

$$p = \omega \sqrt{-1}.$$

On a alors pour Z la caractéristique bien connue et Z_1 est une impédance.

Dans un câble bien isolé, $L = S = 0$ et l'on a

$$q = \sqrt{CR\omega \sqrt{-1}}, \tag{34}$$

$$Z = \sqrt{\frac{R}{C\omega \sqrt{-1}}} \tag{35}$$

et

$$\beta = \frac{Z_1 - Z}{Z + Z_1}, \tag{36}$$

algébriquement.

Digitized by Google

LIGNE DE LONGUEUR FINIE AVEC UNE FORCE ÉLECTROMOTRICE DONNÉE EN UN POINT DONNÉ.

La solution générale de l'équation fondamentale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = q^2 V \tag{4}$$

est

$$V = A\varepsilon^{qx} + B\varepsilon^{qx}. \tag{37}$$

L'onde

$$V_1 = A\varepsilon^{-qx} \tag{38}$$

progresse vers la droite et prend la valeur

$$V_1^{(l)} = A\varepsilon^{-ql} \tag{39}$$

à la distance l, qui est l'extrémité de la ligne.

L'onde rétrograde

$$V_2 = B\varepsilon^{qx} \tag{40}$$

y prend la valeur

$$V_2^{(l)} = B\varepsilon^{ql} \tag{41}$$

et le rapport entre l'onde incidente et l'onde réfléchie est

$$V_1^{(l)} : V_2^{(l)} :: A\varepsilon^{-ql} : B\varepsilon^{ql}. \tag{42}$$

Si j'appelle β le coefficient de réflexion, j'aurai donc

$$B = A\varepsilon^{-2ql}\beta. \tag{43}$$

En posant

$$A\varepsilon^{-ql} = M, \tag{44}$$

il vient donc

$$V = M(\varepsilon^{q(l-x)} + \beta\varepsilon^{-q(l-x)}), \tag{45}$$

ce qui était bien évident, en prenant $l - x$ pour variable.

Dans ce calcul, nous avons laissé indéterminée la nature physique de l'extrémité, nous contentant de la caractériser par son coefficient de réflexion β.

Digitized by Google

La formule qu'on vient d'établir est valable entre la source et l'extrémité droite.

Supposons maintenant qu'une force électromotrice soit placée au point

$$x = a \tag{46}$$

situé entre o et l, et que pour $x = o$ on ait le commencement de la ligne avec le coefficient de réflexion α.

Alors la formule qui donne le potentiel entre l'origine o et la source sera

$$V' = M'(\varepsilon^{qx} + \alpha\varepsilon^{-qx}), \tag{47}$$

puisque x joue maintenant le rôle de $l - x$.

Nous avons maintenant à satisfaire à deux conditions limites.

Tout d'abord, pour $x = a$, V et V' doivent devenir égaux.

On aura donc $V = V'$, ou

$$M(\varepsilon^{q(l-a)} + \beta\varepsilon^{-q(l-a)}) = M'(\varepsilon^{qa} + \alpha\varepsilon^{-qa}). \tag{48}$$

En second lieu, le courant, pour $x = a$, est dû à la fois aux voltages V qui pousse l'électricité à droite et V' qui pousse l'électricité à gauche; si donc I est l'intensité en a, on aura

$$RI = -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial x} \tag{49}$$

ou

$$RI = Mq(\varepsilon^{q(l-x)} - \beta\varepsilon^{-q(l-x)}) + M'q(\varepsilon^{qx} - \alpha\varepsilon^{-qx}). \tag{50}$$

On en déduit

$$\frac{M}{\varepsilon^{qa} + \alpha\varepsilon^{-qa}} = \frac{M'}{\varepsilon^{q(l-a)} + \beta\varepsilon^{-q(l-a)}} = \frac{RI}{q2(\varepsilon^{ql} - \alpha\beta\varepsilon^{-ql})}; \tag{51}$$

d'où les formules

$$V = \frac{\varepsilon^{qa} + \alpha\varepsilon^{-qa}}{\varepsilon^{ql} - \alpha\beta\varepsilon^{-ql}}(\varepsilon^{q(l-x)} + \beta\varepsilon^{-q(l-x)})\frac{RI}{2q}, \tag{52}$$

$$V' = \frac{\varepsilon^{q(l-a)} + \beta\varepsilon^{-q(l-a)}}{\varepsilon^{ql} - \alpha\beta\varepsilon^{-ql}}(\varepsilon^{qx} + \alpha\varepsilon^{-qx})\frac{RI}{2q}. \tag{53}$$

Digitized by Google

CAS D'UNE LIGNE DE LONGUEUR l MISE A LA TERRE A SES DEUX EXTRÉMITÉS. EFFET D'UNE CHARGE INITIALE.

Si Q est la charge déposée en a, on aura

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = pQ. \tag{54}$$

Il n'y aura qu'à remplacer I par pQ.

Quand le câble est mis à la terre aux deux extrémités, on a

$$\alpha = \beta = -1. \tag{55}$$

Car on a bien alors

$$V = 0 \tag{56}$$

pour $x = l$, et

$$V' = 0 \tag{57}$$

pour $x = 0$.

On a alors (52)

$$V = \frac{\operatorname{sh} q a \operatorname{sh} q (l-x)}{\operatorname{sh} q l} \times q l \times \frac{Q}{Cl}, \tag{58}$$

car on a, identiquement, (3),

$$\frac{RI}{q} = \frac{RpQ}{q} = \frac{qQ}{C}. \tag{59}$$

Mais nous avons déjà calculé le facteur symbolique

$$\frac{ql}{\operatorname{sh} ql} = 1 - 2\varepsilon^{p_1 t} + 2\varepsilon^{p_2 t} - 2\varepsilon^{p_3 t} + \ldots, \tag{21}$$

de sorte qu'en prenant $q^2 = -s^2$, comme précédemment, nous avons

$$V = \frac{2Q}{Cl} \sum \sin sa \sin s(l-x) \varepsilon^{pt} \tag{60}$$

ou, puisque

$$\sin sl = 0, \tag{61}$$

$$V = \frac{2Q}{Cl} \sum \sin sa \sin sx \varepsilon^{pt} \text{ (1)} \tag{62}$$

(1) Nous aurions aussi à considérer la fonction V' pour les points à gauche de a,

Digitized by Google

Faisons $t = 0$, supprimons un facteur constant, posons

$$u = \frac{2}{l} \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{63}$$

Nous voyons que u représente zéro partout entre 0 et l, à l'exception du point

$$x = a,$$

où u devient infini, mais de façon que son intégrale, prise par rapport à la variable x, soit égale à l'unité.

En effet, on a à la distance x un élément de câble dx de capacité $C dx$, chargé d'une quantité d'électricité

$$CV dx;$$

en faisant l'intégrale, on voit que

$$\int CV dx$$

est la quantité totale qui charge le câble, mais à l'origine des temps, on communique au câble, au point a, la charge Q; si donc V représente le potentiel initial, on a

$$Q = \int CV dx. \tag{64}$$

Donc, pour $t = 0$, il vient

$$\int u dx = 1. \tag{65}$$

Si nous multiplions une fonction continue de a, par exemple $f(a)$ par u, nous aurons donc

$$\int u f(a) da = f(x) \tag{66}$$

si les limites comprennent le point x, car si a est différent de x on a $u = 0$, et pour $x = a$ on a $\int u da = 1$.

---

puisque V ne s'applique qu'aux points situés à la droite; mais on peut s'en dispenser puisque la formule à laquelle nous arrivons est symétrique par rapport à a et à x; on peut donc les intervertir, ce qui intervertit les positions relatives des points correspondants, sans avoir à changer la formule.

Digitized by Google

Appliquons ce résultat à notre problème.

On voit donc que la formule

$$f(x) = \frac{2}{l} \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} \, dy \tag{67}$$

est le développement d'une fonction arbitraire $f(x)$ en une série de sinus, fonction qui doit s'annuler pour $x = 0$ et pour $x = l$, sans quoi la formule serait en défaut.

Dans ces conditions, la fonction

$$V_0 = \frac{2}{l} \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \varepsilon^{p't} \int_0^l V_0 \sin \frac{n\pi y}{l} \, dy \tag{68}$$

représente le potentiel au point x, au bout d'un temps t, à partir du moment où le potentiel était représenté par V_0.

La quantité représentée auparavant par Q est représentée maintenant par

$$CV_0 dy ;$$

c'est la charge de l'élément dy.

CAS D'UNE LIGNE DE LONGUEUR FINIE ISOLÉE A SES DEUX EXTRÉMITÉS. EFFET D'UNE CHARGE INITIALE.

Quand la ligne est isolée à une extrémité, le coefficient de réflexion à cette extrémité est égal à $+1$.

Il faut donc faire, dans le cas présent,

$$\alpha = \beta = 1.$$

Supposons que la charge Q soit déposée au point $x = a$, alors la formule (52) donnera pour le potentiel à droite :

$$V = q l \frac{\operatorname{ch} qa}{\operatorname{sh} ql} \operatorname{ch} q(l - x) \frac{Q}{Cl}.$$

En intervertissant a et x, on obtient la formule en V' applicable à gauche de la source.

Nous pouvons remarquer tout d'abord qu'une fonction entière de q^2, qui commence par un terme en q^2, ne contient en réalité que

Digitized by Google

des symboles de dérivation et que cet opérateur appliqué à une constante donnera un résultat identiquement nul.

Si donc nous posons $q^2 = -s^2$, nous pourrons, dans le développement de l'expression précédente, négliger le terme en $\sin sx$.

Nous utiliserons d'ailleurs la formule de trigonométrie ci-après :

$$sl \cot sl = ql \operatorname{cothyp.} ql = 1 + \sum_n \frac{2}{1 + \left(\frac{n\pi}{ql}\right)^2} = 1 + 2\sum \varepsilon^{pt}$$

avec les valeurs de p données par l'équation (22).

Il vient alors

$$V = \frac{Q}{2Cl} \cos sa \cos sx (1 + 2\varepsilon^{pt} + 2\varepsilon^{pt} + \dots)$$

ou

$$V = \frac{Q}{2Cl}\left(1 + 2\sum \cos sa \cos sx \varepsilon^{pt}\right).$$

La symétrie en x et a de cette formule montre que V' donnerait le même résultat.

Il en résulte que

$$u = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi a}{l}$$

est une fonction unité impulsive existant au point $x = a$, comme la fonction u de l'équation (63).

La formule (66) s'applique donc et l'on peut développer une fonction suivant les cosinus par la formule

$$f(x) = \frac{1}{l}\int_0^l f(y)\left(1 + 2\sum_1^\infty \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{l}\right) dy.$$

L'introduction du facteur de temps ε^{pt}, où

$$p = -\frac{n^2\pi^2}{CRl^2}$$

dans la sommation, représentera ce que le potentiel initial $f(x)$ devient au bout d'un certain temps t par la diffusion dans un câble dont les extrémités sont isolées.

L'état final est un potentiel uniforme moyen.

Digitized by Google

THÉORÈME DE FOURIER.

Nos deux fonctions u représentent des fonctions de la nature d'une impulsion, sauf que t est remplacé par x. L'impulsion est localisée au point $x = a$, situé entre o et l. Mais la fonction u en sinus représente une série d'impulsions unités aux points a, $a + 2l$, $a + 4l$, etc., $a - 2l$, $a - 4l$, etc., parce qu'elle admet la période $2l$ et une série d'impulsions unités négatives aux points $-a$, $-a + 2l$, etc., $-a - 2l$, etc., parce que c'est une fonction impaire.

La fonction u en cosinus représente des impulsions unités positives en tous ces points.

Ni l'une ni l'autre n'est une répétition périodique des mêmes impulsions.

Mais en prenant leur demi-somme les impulsions négatives se détruisent avec les positives placées aux mêmes points.

Il n'y a plus qu'une série d'impulsions unités positives placées aux points $\pm 2nl$, où n est entier.

Donc

$$u = \frac{1}{2l}\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{l}(y - x)\right)$$

est une fonction de y égale à zéro partout, excepté aux points $x \pm 2nl$ où elle est infinie, mais de façon que son intégrale soit égale à l'unité.

Donc la formule

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{0}^{2l}\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{l}(y - x)\right) f(y)\,dy$$

donne le développement d'une fonction dont les valeurs sont données entre o et $2l$, en une somme de sinus et de cosinus affectés de coefficients constants.

D'ailleurs la série ainsi obtenue est périodique et sa période est $2l$.

THÉORÈME DU DEVELOPPEMENT DE HEAVISIDE.

Soit

$$E = ZI \tag{1}$$

la solution exprimée au moyen d'un opérateur Z d'un problème élec-

Digitized by Google

tromagnétique. Admettons, pour préciser, que I soit le courant en un point donné, dû à une force électromotrice E, force agissant soit au même point, soit en un point différent.

Si E est une force électromagnétique constante qui commence à agir à l'époque $t = 0$, le courant I est exprimé par la formule

$$I = \frac{E}{Z_0} + E \sum \frac{e^{pt}}{p \frac{dZ}{dp}}. \tag{2}$$

Dans (1), Z est un opérateur dans lequel p désigne le symbole de dérivation $\frac{d}{dt}$; de sorte que l'équation (1) est une équation symbolique.

Dans l'équation (2), Z est une quantité algébrique. Z_0 est la valeur de Z quand on donne au symbole p la valeur algébrique zéro; sous le signe de sommation, p doit être remplacé successivement par les diverses valeurs des racines de l'équation $Z = 0$, où p serait une inconnue algébrique. Dans $\frac{dZ}{dp}$, p a à être remplacé également par ces racines.

Supposons, par exemple, qu'on ait

$$Z = Z_0 + Z_1 p + \ldots + Z_{n-1} p^{n-1} + p^n.$$

L'équation $Z = 0$ sera l'équation caractéristique.

L'équation (1) est une équation différentielle dont la solution est la somme d'une solution particulière, qui par exemple peut être :

$$I = \frac{E}{Z_0}$$

et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Cette solution générale est de la forme

$$\Sigma M_i e^{p_i t},$$

où p_i est une racine de l'équation caractéristique.

Donc la formule (2) représente une certaine solution de l'équation différentielle (1).

Je vais montrer que la solution représentée par la formule (2) est celle qui convient quand on part du repos.

Il suffit de faire voir que I s'annule ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées par rapport au temps, pour $t = 0$.

Digitized by Google

Pour simplifier le calcul, supposons que l'on ait

$$Z = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)\dots.$$

Une formule connue, celle du développement de la fonction de p_1 :

$$\frac{1}{p_1(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)},$$

en fractions simples, donne

$$\frac{1}{p_1(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)} = + \frac{1}{p_1 p_2 p_3} - \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)} - \frac{1}{p_3(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)}.$$

Faisons passer tous les termes dans le premier membre, et ayons égard à la valeur de Z; ceci pourra s'écrire :

$$\frac{1}{Z_0} + \sum \frac{1}{p_i} \times \frac{1}{\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_{p=p_i}} = 0.$$

Si donc on fait $t = 0$, on a $e^{pt} = 1$, et la formule (2) donne

$$I = 0.$$

Prenons la dérivée $k^{\text{ième}}$, il vient

$$\frac{d^k I}{dt^k} = E \sum p^{k-1} \frac{e^{pt}}{\frac{\partial Z}{\partial p}}.$$

Mais pour $k < n$, on a, d'après les formules bien connues d'Euler,

$$\sum \frac{p_i^{k-1}}{\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_{p=p_i}} = 0.$$

Donc pour $t = 0$, on a

$$\frac{d^k I}{dt^k} = 0 \qquad (k < n).$$

On a donc bien la solution qui convient quand on part du repos puisque la fonction, qui est ici le courant, est nulle pour $t = 0$, ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées.

On voit qu'il faut que la sommation s'étende à toutes les racines.

Digitized by Google

Si $Z = 0$ était une équation transcendante ayant une infinité de racines, il faudrait donc étendre la sommation à toutes les racines.

Si on ne les prenait pas toutes, on n'aurait pas la solution à partir du repos.

Si l'on n'en prenait qu'une, on aurait une solution particulière qu'on pourrait appeler *une harmonique*.

Faisons une application.

Considérons l'établissement du courant I d'une pile E dans une bobine de résistance R et d'inductance L, à partir de l'époque $t = 0$ où la pile est introduite dans le circuit.

L'équation différentielle du problème est

$$E = RI + L\frac{dI}{dt}. \tag{3}$$

Posons $\frac{d}{dt} = p$, la solution symbolique sera

$$I = \frac{E}{R + Lp}. \tag{4}$$

Il n'y a donc qu'une racine à considérer

$$p = -\frac{R}{L}.$$

Et l'on a

$$Z = R + Lp \qquad Z_0 = R, \qquad \frac{\partial Z}{\partial p} = L.$$

La formule donne la solution algébrique

$$I = \frac{E}{R} + E\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{\left(-\frac{R}{L}\right)L}. \tag{5}$$

ou

$$\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right). \tag{6}$$

De (4) on tire

$$\frac{E}{R + Lp} = \frac{E}{R}\left[\frac{R}{Lp} - \left(\frac{R}{Lp}\right)^2 + \left(\frac{R}{Lp}\right)^3 - \dots\right]. \tag{7}$$

Or le symbole p^{-1} est l'opérateur inverse de $\frac{d}{dt}$; c'est donc l'opé-

Digitized by Google

rateur $\int_0^t \dots dt$; je mets zéro comme limite inférieure puisque, avant l'époque zéro, E est nul et que l'intégrale ne donnerait rien.

On a donc

$$p^{-1}1 = \int_0^t dt = t \qquad p^{-2}1 = p^{-1}t = \int_0^t t\,dt = \frac{t^2}{2}$$

et d'une façon générale

$$p^{-n}1 = \frac{1}{n!}t^n;$$

d'où

$$I = \frac{E}{R}\left[\frac{R}{L}t - \frac{1}{1.2}\left(\frac{R}{L}t\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{R}{L}t\right)^3 - \dots\right]. \tag{8}$$

La formule (8) n'est autre chose que l'expression explicite de la formule (6).

On remarquera que c'est la self-inductance qui limite la vitesse initiale de l'électricité, puisqu'on a pour t très petit

$$I = \frac{E}{L}t.$$

Quant à $\frac{L}{R}$ c'est une quantité dont les dimensions sont celles d'un temps; on peut lui donner le nom de constante de temps de la bobine (ou du circuit si une partie de la résistance est localisée dans la bobine et le reste dans la pile).

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS.

Soit x la variable indépendante et

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \dots + a_n y^{(n)} = 0 \tag{1}$$

l'équation proposée.

L'équation caractéristique sera

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \tag{2}$$

et elle aura pour racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, quantités que nous supposerons inégales.

La solution générale a la forme

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} A_i e^{\alpha_i x} \tag{3}$$

Digitized by Google

et il s'agit de déterminer les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de façon que y et ses $n-1$ premières dérivées prennent pour $x=0$ les n valeurs particulières $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$.

J'aurai donc n équations de la forme

$$y_0^{(k)} = \Sigma A_i \alpha_i^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Pour résoudre ce système, je multiplie les $(n-1)$ équations (4) respectivement par $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ et j'ajoute; j'ai

$$\sum_k \lambda_k y_0^{(k)} = \sum_k \sum_i \lambda_k \alpha_i^k A_i = \sum_i \left(A_i \sum_k \lambda_k \alpha_i^k \right). \tag{5}$$

Cette équation me donnera immédiatement A_i si je puis déterminer les valeurs de λ de façon que tous les coefficients de $A_1 A_2$ et A_n soient nuls à l'exception de celui de A_i. C'est ce qui aura lieu si la fonction

$$\varphi(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{n-1} x^{n-1} \tag{6}$$

s'annule pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, à l'exception de α_i. Or, si je divise $F(x)$ par $x - \alpha$, j'aurai pour quotient une fonction $\varphi(x)$ qui satisfera évidemment à cette condition, si dans ses coefficients je remplace α par α_i. Je l'appellerai alors $\varphi_i(x)$. J'aurai, en effet,

$$F(x) = (x - \alpha)\varphi(x) + F(\alpha). \tag{7}$$

Comme $F(x)$ et $F(\alpha)$ s'annulent si je fais $\alpha = \alpha_i$ et $x = \alpha_j$, et que cette substitution me donne pour φ_i

$$F(\alpha_j) = (\alpha_j - \alpha_i)\varphi_i(\alpha_j) + F(\alpha_j), \tag{8}$$

j'en tirerai

$$\varphi_i(\alpha_j) = 0 \quad \text{pour } j \neq i, \qquad \text{et par suite } \alpha_j \neq \alpha_i, \tag{9}$$

et d'ailleurs, en prenant la dérivée, j'aurai

$$F'(x) = \varphi(x) + (x - \alpha)\varphi'(x); \tag{10}$$

d'où, en faisant $x = \alpha = \alpha_i$,

$$F'(\alpha_i) = \varphi_i(\alpha_i). \tag{11}$$

L'équation (5) donnera donc, si je détermine les λ de façon

Digitized by Google

que $\varphi(x)$ se réduise à $\varphi_i(x)$,

$$\Sigma \lambda_k^i y_0^{(k)} = A_i F'(\alpha_i) \tag{12}$$

et j'aurai, par suite,

$$y = \sum_i \frac{e^{\alpha_i x}}{F'(\alpha_i)} \sum_k \lambda_k^i y_0^{(k)}. \tag{13}$$

Le polynome $\varphi(x)$ s'obtient en divisant $F'(x)$ par $x - \alpha$ et la division donne

$$\begin{aligned}\varphi(x) = a_n x^{n-1} + (a_n \alpha + a_{n-1}) x^{n-2} + (a_n \alpha^2 + a_{n-1}\alpha + a_{n-2}) x^{n-3} + \dots \\ + a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \dots + a_2 \alpha + a_1\end{aligned} \tag{14}$$

Les coefficients de cette fonction sont $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1, \lambda_0$.

Le calcul symbolique peut abréger ces calculs. On a, en effet, par exemple, pour équation différentielle

$$y^{(3)} + a y^{(2)} + b y' + c y = 0 \tag{15}$$

ou, suivant la notation de Lagrange,

$$(\mathfrak{D}^{(3)} + a \mathfrak{D}^{(2)} + b \mathfrak{D} + c) y = 0 \tag{16}$$

ou, en réduisant en facteurs,

$$(\mathfrak{D} - \alpha_1)(\mathfrak{D} - \alpha_2)(\mathfrak{D} - \alpha_3) y = 0. \tag{17}$$

Je pose

$$F(y) = y^3 + a y^2 + b y + c, \tag{18}$$

je divise $F(y)$ par $y - \alpha$ et j'ai

$$F(y) = (y - \alpha)[y^2 + (a + \alpha) y + (b + a\alpha + \alpha^2)] + F(\alpha). \tag{19}$$

Je dis que la solution est

$$y = \sum \frac{F(y_0)}{y_0 - \alpha} \frac{e^{\alpha t}}{F'_\alpha} \tag{20}$$

en entendant par $\frac{F(y_0)}{y_0 - \alpha}$ la fonction

$$y''_0 + (a + \alpha) y'_0 + (b + a\alpha + \alpha^2) y_0 \tag{21}$$

qui se déduit du quotient de $F(y_0)$ par $y_0 - \alpha$ en remplaçant les exposants par des indices de dérivation et restituant y_0 qui vaut $y_0^{(0)}$ à la place de l'unité y_0^0.

Digitized by Google

Or il est évident que (20) est solution, puisqu'on a

$$(22) \qquad (\mathfrak{D} - \alpha_i) e^{\alpha_i t} = 0$$

et par suite

$$(23) \qquad F(\mathfrak{D}) y = \sum \frac{F(y_0)}{y_0 - \alpha_i} \frac{1}{F'_{(\alpha_i)}} (\mathfrak{D} - \alpha_1)(\mathfrak{D} - \alpha_2)(\mathfrak{D} - \alpha_3) e^{\alpha_i t} = 0.$$

Je dis, d'autre part, que l'on a pour $i \leq n - 1$:

$$(24) \qquad y_0^{(i)} = \sum \frac{F(y_0)}{y_0 - \alpha} \frac{\alpha^i}{F'_\alpha} e^{\alpha t} \qquad \text{pour } t = 0.$$

En effet, pour $t = 0$, ceci équivaut à

$$(25) \qquad \frac{y_0^i}{F(y_0)} = \sum \frac{\alpha^i}{F'_\alpha} \times \frac{1}{y_0 - \alpha},$$

ce qui est la formule de décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples; seulement, la formule (24) où l'on a fait $t = 0$ est une formule dans laquelle les exposants de y_0 sont des indices de dérivation, tandis que dans la formule (25), y_0^i est la puissance $i^{\text{ième}}$ de y_0. Si l'on a, en effet, identiquement

$$A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1 = A_2 x^3 + B_2 x^2 + C_2 x + D_2,$$

on a aussi identiquement

$$A_1 \lambda_3 + B_1 \lambda_2 + C_1 \lambda_1 + D \lambda_0 = A_2 \lambda_3 + B_2 \lambda_2 + C_2 \lambda_2 + D_2 \lambda_0.$$

Vérifions, par exemple, que la dérivée seconde de

$$(26) \qquad y = \sum [y_0'' + (a + \alpha) y_0' + (b + a\alpha + \alpha^2) y_0] \frac{e^{\alpha t}}{F'_\alpha}$$

est bien égale à y_0''; le calcul est le suivant : on a

$$(27) \qquad y_{t=0}'' = \sum [y_0'' \alpha^2 + (a\alpha^2 + \alpha^3) y_0' + (b\alpha + a\alpha^2 + \alpha^3) \alpha y_0] \frac{1}{F'_\alpha}$$

avec

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a\alpha^2 + \alpha^3 = -(b\alpha + c) \\ b\alpha + a\alpha^2 + \alpha^3 = -c \end{array} \right\} \text{ d'après (17) pour } \alpha = \alpha_1 \text{ ou } \alpha_2 \text{ ou } \alpha_3;$$

d'où

$$(29) \qquad y_{t=0}'' = \sum [y_0'' \alpha^2 - (b\alpha + c) y_0' - c\alpha y_0] \frac{1}{F'_\alpha}.$$

Digitized by Google

D'après les formules d'Euler, il reste

$$y''_{l=0} = y''_0. \tag{30}$$

On ferait de même la vérification pour les $n-1$ premières dérivées dans le cas général. Remarquons d'ailleurs que les formules d'Euler dérivent justement de l'identité (25).

Considérons maintenant l'équation avec second membre

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \ldots + a_n y^{(n)} = f(x).$$

Pour avoir l'intégrale de cette équation qui se réduit, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, à $y_0 y'_0 \ldots y_0^{(n-1)}$ respectivement, il suffit d'ajouter à l'intégrale de l'équation sans second membre que nous venons d'établir l'intégrale particulière qui pour $x = 0$ s'annule ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées. Cette intégrale est

$$X = \sum \frac{e^{\alpha x}}{F'(\alpha)} \int_0^x e^{-\alpha x} f(x)\, dx \qquad (\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

J'aurai, en effet, une identité en substituant dans l'équation différentielle. Je dois tout d'abord calculer les dérivées; or j'ai

$$X' = \sum \frac{\alpha e^{\alpha x}}{F'(\alpha)} \int_0^x e^{-\alpha x} f(x)\, dx + \sum \frac{1}{F'(\alpha)} f(x).$$

Mais, d'après une relation connue, on a

$$\sum \frac{1}{F'(\alpha)} = 0;$$

il reste donc

$$X' = \sum \frac{\alpha e^{\alpha x}}{F'(\alpha)} \int_0^x e^{-\alpha x} f(x)\, dx.$$

Je dis que j'ai pour $k < n$

$$X^{(k)} = \sum \frac{\alpha^k e^{\alpha x}}{F'(\alpha)} \int_0^x e^{-\alpha x} f(x)\, dx.$$

Car, en prenant la dérivée, il vient

$$X^{(k+1)} = \sum \frac{\alpha^{k+1} e^{-\alpha x}}{F'(\alpha)} \int_0^x e^{-\alpha x} f(x)\, dx + \sum \frac{\alpha^k}{F'(\alpha)} f(x).$$

Digitized by Google

Or, d'après une relation connue, on a

$$\sum \frac{\alpha^k}{F'(\alpha)} = 0.$$

Il reste donc

$$X^{(k+1)} = \sum \frac{\alpha^{k+1} e^{\alpha x}}{F'(\alpha)} \int_0^x e^{-\alpha x} f(x)\, dx,$$

ce qui montre la généralité de la formule; enfin on aura

$$X^{(n)} = \sum \frac{\alpha^n e^{\alpha x}}{F'(x)} \int_0^x e^{-\alpha x} f(x)\, dx + \sum \frac{\alpha^{n-1}}{F'(\alpha)} f(x).$$

Mais, d'après une relation connue, on a

$$\sum \frac{\alpha^{n-1}}{F'(\alpha)} = \frac{1}{a_n}.$$

Il reste donc

$$X^{(n)} = \sum \frac{\alpha^n e^{\alpha x}}{F'(\alpha)} \int_0^x e^{-\alpha x} f(x)\, dx + \frac{1}{a_n} f(x).$$

En substituant à y, y', y'', ..., dans l'équation proposée la fonction X et ses dérivées successives, on obtient

$$\sum \frac{a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \ldots + a_n \alpha^n}{F'(x)} \int_0^x e^{-\alpha x} f(x)\, dx + f(x) = f(x),$$

ce qui est une identité, puisque les n valeurs de α sont racines de $F(x)$.

La formule qui donne X est donc démontrée.

Digitized by Google

CHAPITRE XIV.

PROPAGATION DU COURANT.

Dans le calcul qui va suivre, je me propose de montrer qu'on peut résoudre le problème de la propagation le long d'une ligne télégraphique, en tenant compte des appareils d'émission et de réception, sans avoir à intégrer l'équation des télégraphistes. Cette équation n'aura même pas besoin d'être écrite.

Il suffit de considérer une ligne artificielle composée d'un certain nombre de sections identiques les unes aux autres et de faire croître leur nombre indéfiniment.

On est donc ramené au simple cas d'un réseau de Kirchhoff.

D'autre part, le régime variable dû à une force électromotrice variable se ramène évidemment à la superposition des effets dus successivement aux accroissements progressifs de cette force électromotrice variable.

Tout revient donc à considérer le régime variable qui suit l'introduction d'une force électromotrice constante, en supposant qu'on parte du repos.

Mais une force électromotrice constante est égale à l'intégrale

$$E = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{\omega t\sqrt{-1}}\, d\omega}{\omega}$$

prise dans le plan de la variable imaginaire ω, et peut être par suite envisagée comme une somme algébrique de forces électromotrices de la forme

$$e^{\omega t\sqrt{-1}} \times \text{const.}$$

Or, que ω soit réel ou imaginaire, la forme de la solution des équations qui déterminent le mouvement de l'électricité est toujours la même.

On est donc ramené, en définitive, au régime périodique permanent de pulsation ω.

Digitized by Google

Mais ce problème peut être traité très simplement : il suffit de résoudre celui qui correspond au régime permanent avec des forces électromotrices constantes, puis de supposer que, dans la solution, on remplace les résistances des diverses branches par des impédances imaginaires de la forme $a + b\omega\sqrt{-1}$.

Chemin faisant, en étudiant les lignes artificielles, je serai amené à donner les expressions de polynomes assujettis à une loi de récurrence du second ordre.

Ces polynomes ont déjà été envisagés par Vaschy au début du Tome II de son Traité d'électricité et de magnétisme.

J'indique comment on les obtient.

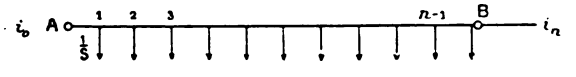
Puis je tire de considérations physiques évidentes la formule d'addition d'indices.

Comme ces polynomes, lorsque leur degré augmente indéfiniment, tendent vers le sinus et le cosinus d'un argument, on voit qu'on rattacherait ainsi, si cela pouvait avoir quelque utilité, la théorie des fonctions circulaires à cette question d'électricité. Le rapprochement est, en tout cas, assez curieux.

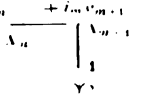
La formule de récurrence se prête à des considérations analogues à celles des suites de Sturm; il faudrait faire $\alpha^2 = x$ pour les polynomes de degré pair; on verrait alors que toutes les racines de x sont réelles et négatives.

LIGNE AFFECTÉE DE PERTES ÉQUIDISTANTES SOUS FORCE ÉLECTROMOTRICE CONSTANTE.

Fig. 38.



Soit AB une ligne composée de n tronçons égaux, composés chacun



d'une résistance r et d'une dérivation de résistance $\frac{1}{s}$. Soit AB le sens dans lequel on compte positivement les courants.

Digitized by Google

Soient v_0, v_1, v_2, ..., v_n les potentiels en A, aux points de division 1, 2, ..., $n-1$ et en B, et soient i_0, i_1, i_2, ..., i_n les valeurs des intensités dans les sections $A_0 1$, 12, 23, ..., $(n-1, n)$, et au delà de B.

On aura

$$(1) \qquad i_0 = i_1 + v_1 s, \qquad v_0 = v_1 + i_0 r,$$

$$(2) \qquad i_m = i_{m+1} + v_{m+1} s, \qquad v_m = v_{m+1} + i_m r,$$

$$(3) \qquad i_{n-1} = i_n + v_n s, \qquad v_{n-1} = v_n + i_{n-1} r.$$

Si, en A, est branchée une pile E de résistance R_0 et en B une résistance R_1, les extrémités de ces deux branches supplémentaires étant mises à la terre, on aura

$$(4) \qquad E = v_0 + i_0 R_0, \qquad v_n = i_n R_1.$$

Je pose, d'une façon générale,

$$(5) \qquad j_m = i_m \sqrt{r}, \qquad u_m = v_m \sqrt{s}, \qquad \sqrt{rs} = \alpha,$$

et j'ai, à la place des équations (1), (2), (3),

$$(6) \qquad j_0 = j_1 + u_1 \alpha, \qquad u_0 = u_1 + j_0 \alpha,$$

$$(7) \qquad i_m = j_{m+1} + u_{m+1} \alpha, \qquad u_m = u_{m+1} + j_m \alpha,$$

$$(8) \qquad j_{n-1} = j_n + u_n \alpha, \qquad u_{n-1} = u_n + j_{n-1} \alpha.$$

Effectuons les calculs de proche en proche, on a

$$(9) \qquad u_1 = u_0 - j_0 \alpha,$$

$$(10) \qquad j_1 = -\alpha u_0 + j_0 (1 + \alpha^2),$$

$$(11) \qquad u_2 = (1 + \alpha^2) u_0 - j_0 (2\alpha + \alpha^3),$$

$$(12) \qquad j_2 = -(2\alpha + \alpha^3) u_0 + j_0 (1 + 3\alpha^2 + \alpha^4).$$

On voit par là que j_m sera un polynome entier en α de degré $2m$ et pair, et que u_m sera un polynome de degré $2m-1$ et impair.

Lemme. — Calculons tout d'abord les polynomes P, dont les

Digitized by Google

degrés sont indiqués par les indices et que fournit la loi de récurrence suivante :

$$P_{m+1} - P_{m-1} = x P_m \tag{13}$$

avec les conditions initiales

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = x. \tag{14}$$

Il est évident que l'on aura successivement.

$$\begin{aligned}
&P_0 = 1,\\
&P_1 = \quad x,\\
&P_2 = 1 \quad + x^2,\\
&P_3 = \quad 2x \quad + x^3,\\
&P_4 = 1 \quad + 3x^2 \quad + x^4,\\
&P_5 = \quad 3x \quad + 4x^3 \quad + x^5,\\
&P_6 = 1 \quad + 6x^2 \quad + 5x^4 \quad + x^6,
\end{aligned} \tag{15}$$

et que les coefficients placés dans les diagonales ascendantes du Tableau forment les coefficients du binome; cela ressort de la loi de formation.

On aura donc :

$$P_{2n} = 1 + \frac{(n+1)n}{1.2}x^2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}x^4 + \ldots + x^{2n}, \tag{16}$$

$$P_{2n+1} = (n+1)x + \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}x^3 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4.5}x^5 + \ldots + x^{2n+1}. \tag{17}$$

Les polynomes P_n sont donc à considérer comme connus (*voir* Note annexée). Or on a, d'après (13),

$$P_{2n} - P_{2n-2} = x P_{2n-1} \tag{18}$$

et

$$P_{2n-2} - P_{2n-4} = x P_{2n-3}, \tag{19}$$

Digitized by Google

d'où, par différence,

$$P_{2n} - 2P_{2(n-1)} + P_{2(n-2)} = \alpha(P_{2n-1} - P_{2n-3}). \tag{20}$$

Mais on a, d'après (13),

$$P_{2n-1} - P_{2n-3} = \alpha P_{2n-2},$$

d'où

$$P_{2n} - 2P_{2(n-1)} + P_{2(n-2)} = \alpha^2 P_{2(n-1)}, \tag{21}$$

ce qui nous donne l'équation de récurrence entre les polynomes de degré pair.

Il serait, d'ailleurs, facile de vérifier que la même équation de récurrence existe entre les polynomes de degré impair.

Note. — Les formules (16) et (17) peuvent aussi se démontrer de la façon suivante :

Cherchons le développement en série suivant les puissances croissantes de x de la fraction

$$\frac{1}{1 + bx + cx^2}. \tag{1}$$

Par le procédé de la simple division algébrique, on obtient aisément les premiers termes, savoir

$$\frac{1}{1 + bx + cx^2} = 1 - bx + (b^2 - c)x^2 - (b^3 - 2bc)x^3 + \ldots. \tag{2}$$

Mais, d'une façon générale, on a

$$\frac{1}{1 + x(b + cx)} = \Sigma(-1)^n x^n (b + cx)^n. \tag{3}$$

Groupons les termes correspondant à une même puissance de x.

Posons

$$\frac{1}{1 + bx + cx^2} = \Sigma A_n x^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty), \tag{4}$$

ce qui est permis si le module de x est inférieur au plus petit module des racines du dénominateur, et rien ne nous empêche de faire cette supposition.

Digitized by Google

Nous aurons

$$(5)\quad \begin{cases} (-1)^n x^n (b+cx)^n \\ \quad = (-1)^n x^n \left[b^n + n b^{n-1} cx + \dfrac{n(n-1)}{1.2} b^{n-2} c^2 x^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} b^{n-3} c^3 x^3 + \dots \right], \\ (-1)^{n-1} x^{n-1} (b+cx)^{n-1} \\ \quad = (-1)^{n-1} x^{n-1} \left[b^{n-1} + (n-1) b^{n-2} cx + \dfrac{(n-1)(n-2)}{1.2} b^{n-3} c^2 x^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} b^{n-4} c^3 x^3 + \dots \right], \\ (-1)^{n-2} x^{n-2} (b+cx)^{n-2} \\ \quad = (-1)^{n-2} x^{n-2} \left[b^{n-2} + (n-2) b^{n-3} cx + \dfrac{(n-2)(n-3)}{1.2} b^{n-4} c^2 x^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3} b^{n-5} c^3 x^3 + \dots \right]; \end{cases}$$

d'où

$$(6)\quad A_n = (-1)^n \left[b^n - (n-1) b^{n-2} c + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} b^{n-4} c^2 - \dots \right].$$

Mais ici il faut distinguer deux cas, celui où n est pair et celui où n est impair. Si n est pair, posons $n = 2m$, et le terme le moins élevé du développement (3) où apparaîtra x^m sera le terme

$$(-1)^m x^m (b+cx)^m,$$

où le coefficient de x^{2m} est $(-1)^m c^m$.

Si n est impair, posons $n = 2m+1$, le terme le moins élevé du développement (3) où apparaîtra x^{m+1} sera le terme

$$(-1)^{m+1} x^{m+1} (b+cx)^{m+1},$$

où le coefficient de x^{2m+1} est $(-1)^{m+1} (m+1) c^m b$.

On aura donc

$$(7)\quad A_{2m} = b^{2m} - (2m-1) b^{2m-2} c + \frac{(2m-2)(2m-3)}{1.2} b^{2m-4} c^2 + \dots + (-1)^m c^m,$$

$$(8)\quad A_{2m+1} = -\left[b^{2m+1} - 2m b^{2m-1} c + \frac{(2m-1)(2m-2)}{1.2} b^{2m-3} c^2 + \dots + (-1)^m (m+1) c^m b \right]$$

Digitized by Google

et l'on retrouve bien, pour $m = 1$, les valeurs de A_2 et A_3, savoir

$$A_2 = b^2 - c, \qquad A_3 = -[b^3 - 2bc].$$

Maintenant, multiplions les deux membres de (4) par $1 + bx + cx^2$ et égalons à zéro les coefficients des diverses puissances de x, nous aurons la formule de récurrence

$$A_{n+1} + bA_n + cA_{n-1} = 0. \tag{9}$$

Cette formule correspondra à la formule de récurrence des polynomes P_n

$$P_{n+1} - \alpha P_n - P_{n-1} = 0, \tag{10}$$

si l'on fait

$$b = -\alpha, \qquad c = -1, \tag{11}$$

et l'on aura

$$\frac{1}{1 - \alpha x - x^2} = 1 + \alpha x + (\alpha^2 + 1)x^2 + (\alpha^3 + 2\alpha)x^3 + \dots. \tag{12}$$

Pour retrouver la formule du texte, il nous suffit de remarquer, pour un polynome de degré pair, par exemple, que le coefficient de

$$(-1)^p b^{2m-2p} c^p$$

d'après la formule (7) est égal à

$$C^p_{2m-p} = \frac{(2m-p)(2m-p-1)\dots(2m-2p+1)}{1.2\dots p},$$

ou

$$\frac{(2m-p)!}{p!\,(2m-2p)!}$$

ou

$$C^{2m-2p}_{2m-p} = \frac{(2m-p)(2m-p-1)\dots(p+1)}{1.2\dots(2m-2p)};$$

or, par la substitution (11), le terme $(-1)^p b^{2m-2p} c^p$ devient

$$+\alpha^{2m-2p},$$

et le coefficient donné par la formule (16) est bien

$$\frac{(2m-p)(2m-p-1)\dots(m+1)m(m-1)\dots[m-(m-p)+1]}{1.2\dots(2m-2p)} = C^{2m-2p}_{2m-p}.$$

Digitized by Google

Remarque. — Entre les intensités j, j'ai de même

$$j_{n-1} - j_n = u_n \alpha, \tag{22}$$

$$j_n - j_{n-1} = u_{n-1} \alpha, \tag{23}$$

d'où

$$j_{n-1} - 2 j_n + j_{n+1} = \alpha (u_n - u_{n+1}) = \alpha^2 j_n, \tag{24}$$

ou, en changeant n en $n-1$ et ordonnant,

$$j_n - 2 j_{n-1} + j_{n-2} = \alpha^2 j_{n-1}. \tag{25}$$

Il est à noter, d'ailleurs, qu'on aurait pour les u la même équation de récurrence. Comparons (21) et (25). Il résulte de cette comparaison que la solution générale sera

$$u_m = u_0 P_{2m-2} - j_0 P_{2m-1}, \tag{26}$$

$$j_m = -u_0 P_{2m-1} + j_0 P_{2m}. \tag{27}$$

En effet, cette double formule satisfait à la loi de récurrence (25) et, d'ailleurs, elle est vérifiée pour $m = 1$ et $m = 2$, si l'on se reporte aux expressions (9) à (12) trouvées pour $u_1 j_1$ et pour $u_2 j_2$. Sa valabilité se trouve donc établie.

Observations. — On remarquera que l'on a

$$P_0 P_2 - P_1^2 = 1, \qquad P_1 P_3 - P_2^2 = -1, \tag{28}$$

puisque les égalités

$$1 \times (1 - \alpha^2) - \alpha^2 = 1, \qquad (1 + \alpha^2)^2 - \alpha (2\alpha + \alpha^3) = 1$$

sont des identités.

Je dis qu'on aura

$$P_{2m-2} P_{2m} - P_{2m-1}^2 = 1. \tag{29}$$

En effet, remplaçons P_{2m} par sa valeur (18)

$$P_{2m} = P_{2m-2} - \alpha P_{2m-1},$$

il vient

$$P_{2m-2}^2 + \alpha P_{2m-2} P_{2m-1} - P_{2m-1}^2 = 1,$$

ou, d'après (13),

$$P_{2m-2}^2 - P_{2m-1} P_{2m-3} = 1.$$

On voit qu'en changeant $2m-1$ en $2m-2$, le signe change: donc, en changeant $2m-2$ en $2m-3$, la valeur et le signe seront

Digitized by Google

restitués. La formule se trouve donc ainsi vérifiée, comme il est facile de s'en rendre compte. Et l'on aura, de même,

$$P_{2m-1}P_{2m+1} - P_{2m}^2 = -1. \tag{30}$$

APPLICATION.

Le déterminant étant égal à l'unité, il est aisé de résoudre les équations (26) et (27) par rapport à u_0, j_0. On aura, en effet,

$$u_0 = u_m P_{2m} - j_m P_{2m-1}, \tag{31}$$

$$j_0 = u_m P_{2m-1} - j_m P_{2m-2}. \tag{32}$$

Il est clair d'ailleurs, d'après la symétrie de la ligne électrique, que l'on pourrait facilement obtenir ces formules directement.

FORMULES D'ADDITION D'INDICES.

Si, au lieu de partir du point A, j'avais effectué les calculs en partant d'un point de division quelconque, j'aurais obtenu les mêmes formules. On a donc, en augmentant de p les indices des u et j dans (26) et (27),

$$u_{m+p} = u_p P_{2m-2} - j_p P_{2m-1}, \tag{33}$$

$$j_{m+p} = -u_p P_{2m-1} + j_p P_{2m}. \tag{34}$$

Mais on a,

$$u_p = u_0 P_{2p-2} - j_0 P_{2p-1}, \tag{35}$$

$$j_p = -u_0 P_{2p-1} + j_0 P_{2p}. \tag{36}$$

Reportons dans les expressions précédentes, il vient

$$u_{m+p} = P_{2m-2}(u_0 P_{2p-2} - j_0 P_{2p-1}) - (-u_0 P_{2p-1} + j_0 P_{2p}) P_{2m-1}, \tag{37}$$

$$j_{m+p} = -P_{2m-1}(u_0 P_{2p-2} - j_0 P_{2p-1}) + (-u_0 P_{2p-1} + j_0 P_{2p}) P_{2m} \tag{38}$$

ou

$$u_{m+p} = u_0(P_{2m-2}P_{2p-2} + P_{2p-1}P_{2m-1}) - j_0(P_{2m-2}P_{2p-1} + P_{2p}P_{2m-1}), \tag{39}$$

$$j_{m+p} = -u_0(P_{2m-1}P_{2p-2} - P_{2p-1}P_{2m}) + j_0(P_{2m-1}P_{2p-1} + P_{2p}P_{2m}). \tag{40}$$

Mais on aurait obtenu directement, d'après (26) et (27),

$$u_{m+p} = u_0 P_{2m+2p-2} - j_0 P_{2m+2p-1}, \tag{41}$$

$$j_{m+p} = -u_0 P_{2m+2p-1} - j_0 P_{2m+2p}. \tag{42}$$

Comparons (39) et (40) à (41) et (42).

Digitized by Google

On a donc les formules d'addition

$$(43)\quad \begin{cases} P_{2m+2p-2} = P_{2m-2}P_{2p-2} + P_{2p-1}P_{2m-1}, \\ P_{2m+2p-1} = P_{2m-2}P_{2p-1} + P_{2p}P_{2m-1}; \end{cases}$$

$$(44)\quad \begin{cases} P_{2m+2p-1} = P_{2m-1}P_{2p-2} + P_{2p-1}P_{2m}, \\ P_{2m+2p} = P_{2m-1}P_{2p-1} + P_{2p}P_{2m}. \end{cases}$$

La première et la quatrième formule se déduisent l'une de l'autre en changeant p et m en $p+1$, $m+1$; les deux autres, en changeant p en m et m en p.

FORMULES DE SOUSTRACTION.

Inversement, étant données les deux formules

$$(45)\quad P_{2p}P_{2m} + P_{2p-1}P_{2m-1} = P_{2m+2p},$$

$$(46)\quad P_{2p-1}P_{2m} + P_{2p-2}P_{2m-1} = P_{2m+2p-1},$$

on peut les résoudre en P_{2m}, P_{2m-1}, et l'on a, en tenant compte de

$$(29)\quad P_{2p}P_{2p-2} - P_{2p-1}^2 = 1,$$

la valeur en P_{2m}

$$(47)\quad P_{2m} = P_{2m+2p}P_{2p-2} - P_{2m+2p-1}P_{2p-1},$$

et de même

$$(48)\quad P_{2m-1} = P_{2m+2p-1}P_{2p} - P_{2m+2p}P_{2p-1}.$$

Changeons maintenant m en $m-p$, il vient

$$(49)\quad P_{2m-2p} = P_{2m}P_{2p-2} - P_{2m-1}P_{2p-1},$$

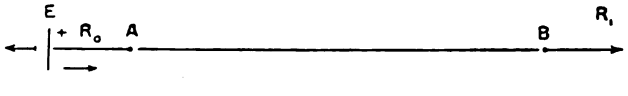
$$(50)\quad P_{2m-2p-1} = P_{2m-1}P_{2p} - P_{2m}P_{2p-1}.$$

Ce sont les formules de soustraction des arguments.

ACHÈVEMENT DE LA SOLUTION.

Cherchons maintenant à satisfaire aux équations relatives aux

Fig. 39.



branches extrêmes. Nous aurons

$$(4)\quad E = e_0 + i_0 R_0, \qquad e_n = i_n R_1$$

Digitized by Google

ou

$$\text{(51)} \qquad E\sqrt{s} = u_0 + j_0 \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}} R_0, \qquad u_n = j_n \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}} R_1,$$

ou, en posant

$$\text{(52)} \qquad \sqrt{\frac{r}{s}} = Z,$$

$$\text{(53)} \qquad E\sqrt{s} = u_0 + j_0 \frac{R_0}{Z}, \qquad u_n = j_n \frac{R_1}{Z}.$$

Nous avons, d'après (31) et (32), en changeant m en n,

$$\text{(54)} \qquad \frac{u_0}{u_n P_{2n} + j_n P_{2n-1}} = \frac{j_0}{u_n P_{2n-1} + j_n P_{2n-2}},$$

ou, en remplaçant u_n et j_n par des quantités proportionnelles, d'après (53),

$$\text{(55)} \qquad \frac{u_0}{R_1 P_{2n} + Z P_{2n-1}} = \frac{j_0}{R_1 P_{2n-1} + Z P_{2n-2}} = \frac{u_0 Z + j_0 R_0}{\Delta} = \frac{E\sqrt{r}}{\Delta},$$

avec

$$\text{(56)} \qquad \Delta = Z(R_1 P_{2n} + R_0 P_{2n-2}) + (Z^2 + R_1 R_0) P_{2n-1}.$$

Il vient donc, en reportant u_0 et j_0 tirés de (55) dans (26) et (27),

$$\text{(57)} \quad u_m = \frac{E\sqrt{r}}{\Delta}[R_1(P_{2m-2}P_{2n} - P_{2m-1}P_{2n-1}) + Z(P_{2m-2}P_{2n-1} - P_{2m-1}P_{2n-2})],$$

$$\text{(58)} \quad j_m = \frac{E\sqrt{r}}{\Delta}[R_1(-P_{2m-1}P_{2n} + P_{2m-2}P_{2n-1}) + Z(-P_{2m-1}P_{2n-1} + P_{2m-2}P_{2n-2})],$$

ou, en utilisant les formules de soustraction (49) et (50),

$$\text{(59)} \qquad u_m = \frac{E\sqrt{r}}{\Delta}(R_1 P_{2n-2m} + Z P_{2n-2m-1}),$$

$$\text{(60)} \qquad j_m = \frac{E\sqrt{r}}{\Delta}(R_1 P_{2n-2m-1} + Z P_{2m-2n}).$$

On a, en effet, pour le second terme de (57), d'après (13) et (50),

$$\text{(61)} \quad \begin{aligned} P_{2m-2}P_{2n-1} - P_{2m-1}P_{2n-2} &= (P_{2m} + \alpha P_{2m-1})P_{2n-1} - P_{2m-1}(P_{2n} + \alpha P_{2n-1}) \\ &= (P_{2m}P_{2n-1} - P_{2m-1}P_{2n} = P_{2n-2m-1}. \end{aligned}$$

Quant à la signification du terme P_{2m-2n} dont l'indice est négatif, il est facile de voir que l'on a

$$\text{(62)} \qquad P_{2m-2n} = P_{2n-2m}.$$

Digitized by Google

On peut constater, en effet, que la suite des polynomes P prolongée du côté des valeurs négatives donne la série suivante :

$$1+3x^2+x^4 \quad -2x-x^3 \quad 1+x^2 \quad -x \quad 1 \quad x \quad 1+x^2 \quad 2x+x^3 \quad \ldots,$$

de sorte que les polynomes à indice pair $+2n$ ou $-2n$ sont identiques, tandis que les polynomes d'indice impair changent de signe avec l'indice.

En revenant, d'après (5), à c_m et j_m, on aura donc la solution :

$$v_m = Z\frac{E}{\Delta}(R_1 P_{2n\ 2m} + Z P_{2n-2m-1}), \tag{63}$$

$$i_m = \frac{E}{\Delta}(R_1 P_{2n-2m-1} + Z P_{2n\ 2m}), \tag{64}$$

$$\Delta = Z(R_1 P_{2n} + R_0 P_{2n\ 2}) + (Z^2 + R_1 R_0) P_{2n-1}. \tag{56}$$

Dans la formule (56), il serait possible de remplacer $P_{2n\ 2}$ en fonction de P_{2n-1} et de P_{2n}; mais, en revanche, on introduirait x.

CAS D'UNE LIGNE HOMOGÈNE.

Supposons que l'on ait une résistance totale Rl, l étant la longueur de la ligne AB, et une perte totale Sl; divisons la ligne en un nombre infiniment grand de parties $\frac{l}{n}$, on aura

$$n \times \frac{l}{n} = l, \qquad m \times \frac{l}{n} = x,$$

m croissant indéfiniment avec n, de façon que le rapport tende vers x.

On aura

$$r = \frac{1}{n} R l, \qquad s = \frac{1}{n} S l, \qquad x = \sqrt{rs} = \sqrt{RS} \times \frac{l}{n}.$$

Or, d'après (16) et (17) :

$$P_{2n} \text{ tend vers } \operatorname{ch}\sqrt{RS}\, l, \quad P_{2m} \text{ vers } \operatorname{ch}\sqrt{RS}\, x,$$
$$P_{2n\ 1} \sim \text{vers } \operatorname{sh}\sqrt{RS}\, l, \quad P_{2m\ 1} \text{ vers } \operatorname{sh}\sqrt{RS}\, x;$$

et si l'on appelle simplement v et i le potentiel et le courant en x, Z désignant la résistance caractéristique

$$Z = \sqrt{\frac{R}{S}},$$

Digitized by Google

on aura, d'après (63) et (64),

$$(65) \qquad v = \frac{EZ}{\Delta}\left[R_1 \operatorname{ch}\sqrt{RS}\,(l-x) + Z \operatorname{sh}\sqrt{RS}\,(l-x)\right],$$

$$(66) \qquad i = \frac{E}{\Delta}\left[R_1 \operatorname{sh}\sqrt{RS}\,(l-x) + Z \operatorname{ch}\sqrt{RS}\,(l-x)\right],$$

$$(67) \qquad \Delta = Z(R_1 + R_0)\operatorname{ch} l\sqrt{RS} + (Z^2 + R_1 R_0)\operatorname{sh} l\sqrt{RS}.$$

Telles sont les formules relatives à une ligne homogène.

Supposons que la force électromotrice soit périodique, de la forme $E_0 e^{\omega t\sqrt{-1}}$, ω étant la pulsation, les formules (63) et (64) donneront la solution.

On pourra d'ailleurs tenir compte de l'inductance et de la capacité en remplaçant r et s par des expressions imaginaires de la forme

$$r = \rho' + \lambda'\omega\sqrt{-1}, \qquad s = \sigma' + \gamma'\omega\sqrt{-1},$$

R_1 et R_0 ayant aussi des valeurs complexes et représentant des impédances imaginaires.

Donc, dans ce cas, les mêmes formules algébriques subsistent; seulement, la signification des symboles est changée. On a des valeurs imaginaires au lieu de valeurs réelles.

Pour passer de là au cas du régime variable produit par l'intercalation d'une force électromotrice constante E_0, il suffit de multiplier par $\frac{d\omega}{2\pi\sqrt{-1}\,\omega}$ et d'intégrer le long d'un chemin qui embrasse à la fois l'origine et tous les pôles dans le plan de la variable imaginaire ω. On obtient ainsi la formule d'Heaviside. Mais, pour que l'on parte du repos, il faut que l'on entoure tous les pôles de la fonction sous le signe « somme ».

Il est clair que la même formule s'applique au cas de la ligne homogène; seulement, dans ce cas, le nombre des pôles est infini et l'on obtient un développement en série. La série est la somme de tous les résidus de la fonction $\frac{v_m}{\omega}$ ou $\frac{i_m}{\omega}$, suivant qu'il s'agit du voltage ou de l'intensité. La solution ainsi obtenue est celle qui convient quand, au début, l'intensité et le voltage sont nuls partout.

On a ainsi la solution du problème sans qu'on ait eu besoin d'écrire l'équation de la propagation. On s'est borné à faire tendre vers l'infini le nombre des sections constitutives de la ligne artificielle.

Digitized by Google

Si j'ai une ligne de longueur l parcourue par un courant de pulsation ω, sous l'action d'une force électromotrice

$$E_0 e^{\omega t\sqrt{-1}}$$

agissant au départ sur une branche d'impédance Z_0, tandis que la ligne aboutit à son autre extrémité à une branche réceptrice d'impédance Z_1 ;

Et si j'appelle α et Z la constante de propagation et l'impédance de la ligne, le potentiel et l'intensité à une distance x de l'origine seront donnés par les formules

$$U = \frac{E_0 Z}{\Delta}[Z \operatorname{sh}\alpha(l-x) + Z_1 \operatorname{ch}\alpha(l-x)]e^{\omega t\sqrt{-1}},$$

$$J = \frac{E_0}{\Delta}[Z \operatorname{ch}\alpha(l-x) + Z_1 \operatorname{sh}\alpha(l-x)]e^{\omega t\sqrt{-1}},$$

avec

$$\Delta = (Z^2 + Z_0 Z_1)\operatorname{sh}\alpha l + Z(Z_0 + Z_1)\operatorname{ch}\alpha l.$$

La solution relative à la période variable sera

$$V = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int U\frac{d\omega}{\omega}, \qquad I = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int J\frac{d\omega}{\omega}.$$

Dans ces formules, ω est une quantité imaginaire. Le contour d'intégration comprendra l'axe réel A'A, en évitant l'origine et en la contournant par-dessous en suivant une petite demi-circonférence ayant son centre à l'origine, puis une demi-circonférence (C) décrite dans le sens de OX vers OY, commençant en A sur l'axe réel du côté des quantités positives et finissant en A' sur la partie négative du même axe.

Le rayon de cette demi-circonférence devra prendre des valeurs croissant indéfiniment.

Ces intégrales satisfont algébriquement aux équations différentielles courantes et elles satisfont également aux équations aux limites pour $x = 0$ et pour $x = l$. Elles sont, en effet, la somme de parties qui, elles-mêmes, satisfont à ces diverses conditions, car nous ne faisons qu'ajouter les effets des diverses forces électromotrices de la forme

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} E_0 e^{\omega t\sqrt{-1}}\frac{d\omega}{\omega}.$$

Digitized by Google

Comme le contour embrasse une fois l'origine, la somme des valeurs que prennent les diverses forces électromotrices le long du contour n'est autre que le résidu

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int E_0\, e^{\omega t\sqrt{-1}}\frac{d\omega}{\omega} = E_0,$$

c'est-à-dire la force électromotrice considérée.

Il est certain que la solution envisagée répond au cas où l'on part du repos, car, en somme, on aura à prendre tous les résidus des intégrales V et I, et c'est dans ces conditions que la formule d'Heaviside s'applique à une force électromotrice E_0 introduite brusquement sur la ligne au repos.

Mais nous pouvons le voir par le raisonnement suivant.

On démontre, en effet, que les intégrales V et I, prises le long de la demi-circonférence (C) de rayon infini sont nulles. Il ne reste donc plus comme contour d'intégration que celui qui longe l'axe réel en contournant l'origine; mais ce contour peut être complété par la demi-circonférence (C') symétrique de (C). On a alors un contour fermé; mais on démontre qu'il ne contient à son intérieur aucun pôle de la fonction à intégrer. L'intégrale est donc nulle.

Or, si l'on suppose $t = 0$, l'intégrale prise le long de (C') est nulle, ainsi qu'on le démontrera.

Il en résulte que l'intégrale prise le long du contour primitif est nulle elle-même, pour $t = 0$, quel que soit x.

Et ceci s'applique aussi bien à V qu'à I.

Si l'on a $I = 0$, quel que soit x pour $t = 0$, on aura également $\frac{\partial I}{\partial x} = 0$ et, par suite, $\gamma\frac{\partial V}{\partial t} + \sigma V = 0$.

Or, on a également $V = 0$; donc il vient

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

On verrait de même qu'on a

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0.$$

Donc V et I partent de zéro avec une vitesse nulle.

On part donc bien du repos.

Digitized by Google

Examinons maintenant les racines de l'équation

$$\Delta = 0.$$

Cette équation est de la forme

$$\operatorname{th} al = \frac{P}{Q},$$

où $\frac{P}{Q}$ est une fonction rationnelle de $\omega\sqrt{-1}$.

Quand ω augmente indéfiniment, $\frac{P}{Q}$ tend vers une limite finie ou infinie A et les racines de Δ tendent vers celles de

$$\operatorname{th} al = A,$$

qui évidemment sont distinctes. On a donc entre ces racines l'espace suffisant pour faire passer les circonférences (C) de rayon indéfiniment croissant que nous avons envisagées.

On peut, en outre, voir que toutes les racines de Δ sont au-dessus de l'axe réel, ou que la valeur correspondante de $\omega\sqrt{-1}$ a sa partie réelle négative.

Cela est nécessaire si le système est dans un état stable quand il est dans l'état de repos; or, si ce n'est pas toujours le cas pour un appareil destiné à engendrer des oscillations entretenues, c'est évidemment le cas pour une ligne télégraphique ou téléphonique.

D'ailleurs, cela résulte de l'étude générale des réseaux; c'est ce que je montre dans un paragraphe spécial intitulé « Étude des racines de l'équation caractéristique ».

Admettons que cette propriété subsiste dans le cas présent où le nombre des branches est infini, car elle est à coup sûr indépendante du nombre des variables.

Il ne me reste plus qu'à chercher la valeur des intégrales prises le long des demi-circonférences (C) et (C') de rayon infiniment grand.

Examinons à cet effet les valeurs asymptotiques des fractions

$$U_1 = \frac{Z(Z+Z_1)e^{a(l-x)} + Z(Z_1-Z)e^{-a(l-x)}}{(Z+Z_0)(Z+Z_1)e^{al} + (Z_1-Z)(Z-Z_0)e^{-al}},$$

$$J_1 = \frac{(Z+Z_1)e^{a(l-x)} - (Z-Z_1)e^{-a(l-x)}}{(Z+Z_0)(Z+Z_1)e^{al} + (Z_1-Z)(Z-Z_0)e^{-al}}.$$

Dans ces formules, la constante de propagation est une fonction

Digitized by Google

de ω; Z, Z_0, Z_1 sont aussi des fonctions de ω. Mais pour $|\omega|$ très grand, on a sensiblement

$$a = \omega\sqrt{-1}\sqrt{\gamma\lambda}.$$

La fonction à intégrer est une fonction méromorphe, malgré l'apparence. Si a et Z sont des radicaux; il faut remarquer que Z n'intervient que dans la combinaison

$$\frac{\operatorname{sh} a(l-x)}{Z} \quad \text{ou} \quad Z\operatorname{sh} a(l-x)$$

et a que dans les combinaisons précédentes ou dans

$$\operatorname{ch} a(l-x);$$

or, on a ainsi des expressions de forme entière.

On peut donc devant les radicaux prendre le signe $+$.

Cela admis, faisons décrire à l'affixe de ω le cercle (C) de rayon infiniment grand.

Les termes prépondérants seront ceux de

$$e^{-a(l-x)} \quad \text{et} \quad e^{-al},$$

respectivement au numérateur et au dénominateur.

Donc U_1 tend vers

$$\frac{Z}{Z-Z_0}e^{\omega x\sqrt{\gamma\lambda}\sqrt{-1}}$$

et J_1 vers

$$-\frac{1}{Z-Z_0}e^{\omega x\sqrt{\gamma\lambda}\sqrt{-1}}.$$

Si je pose, en appelant R le rayon du cercle C,

$$\omega = Re^{\varphi\sqrt{-1}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\omega}{\omega} = d\varphi\sqrt{-1},$$

le module de

$$\int \frac{U}{\omega}\,d\omega$$

sera plus petit que

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi(t+x\sqrt{\gamma\lambda})} \times \left|\frac{Z}{Z-Z_0}\right| d\varphi;$$

mais quand R croît, comme φ et $t+x\sqrt{\gamma\lambda}$ sont positifs, cette intégrale tend vers zéro.

Digitized by Google

On obtiendrait le même résultat pour l'intégrale en J.

Considérons enfin les valeurs asymptotiques de U_1 et de J_1 le long du demi-cercle (C') au-dessous de l'axe des quantités réelles.

En ce cas, les termes prépondérants sont

$$e^{a(t+x)} \quad \text{et} \quad e^{at}$$

respectivement au numérateur et au dénominateur.

Et la valeur asymptotique de la première intégrale sera

$$\operatorname{mod}\int \frac{U}{\omega}\,d\omega < \operatorname{mod}\int_0^{\pi}\left|\frac{Z+Z_0}{Z}\right| \times e^{i\omega(t-x\sqrt{\gamma\lambda})} \times d\varphi.$$

On voit par là que pour $t = 0$ ou, plus généralement, pour

$$t < x\sqrt{\gamma\lambda} \qquad \text{ou} \qquad x > \frac{t}{\sqrt{\gamma\lambda}},$$

l'intégrale est nulle quand R tend vers l'infini.

Même conclusion pour l'autre intégrale.

Ainsi, en un point x, le voltage et l'intensité restent nuls jusqu'à l'époque $t = x\sqrt{\gamma\lambda}$.

La solution considérée est donc bien celle qu'on doit avoir à partir du repos.

La vitesse de propagation de la tête de l'onde est

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}.$$

Pour avoir l'expression analytique de la solution, il suffit de prendre les divers résidus de $\frac{U}{\omega}$ et $\frac{1}{\omega}$.

Quant au résidu pour $\omega = 0$, il correspond à une pulsation infiniment lente; la solution correspondante est donc celle du régime permanent.

APPLICATION.

Ligne mise à la terre au poste de réception, avec une pile sans résistance intérieure, à l'origine, dans la branche de transmission.

Supposons la ligne bien isolée : $\tau = 0$.

Admettons $Z_1 = Z_0 = 0$.

Digitized by Google

La solution sera

$$V = \frac{E_0}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{\omega t\sqrt{-1}}}{\omega} \frac{\operatorname{sh} a(l-x)}{\operatorname{sh} al}\, d\omega$$

avec

$$al = l\sqrt{-LC\omega^2 + RC\omega\sqrt{-1}}.$$

Le résidu pour le pôle $\omega = 0$ est $E_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)$.

Les pôles d'ordre n vont par paires; on a

$$\left.\begin{matrix}\omega'_n \\ \omega''_n\end{matrix}\right\} = \frac{R}{2L}\sqrt{-1} \pm \delta_n, \qquad \delta_n = \sqrt{-\frac{R^2}{4L^2} + \frac{n^2\pi^2}{LCl^2}}.$$

A coup sûr, à partir d'un certain rang, δ_n sera réel et l'harmonique correspondant sera une fonction sinusoïdale amortie. On peut avoir auparavant des fonctions hyperboliques amorties.

La somme des résidus pour ω'_n et ω''_n est

$$E_0\left(\frac{\operatorname{sh} a(l-x)}{\operatorname{ch} al}\right)_{\omega=\omega'_n} \frac{e^{\omega'_n t\sqrt{-1}}}{\omega'_n \dfrac{\partial al}{\partial \omega'_n}} + E_0\left(\frac{\operatorname{sh} a(l-x)}{\operatorname{ch} al}\right)_{\omega=\omega''_n} \frac{e^{\omega''_n t\sqrt{-1}}}{\omega''_n \dfrac{\partial al}{\partial \omega''_n}}.$$

conformément aux formules d'Heaveside et il vient, toutes réductions faites,

$$\frac{V}{E_0} = 1 - \frac{x}{l} - 2\sum \frac{1}{n\pi\,\delta_n} \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\delta_n \cos\delta_n t + \frac{R}{2L}\sin\delta_n t\right).$$

De cette formule on déduirait aisément celle qui convient au courant.

Je puis avoir le courant I par un calcul analogue à celui qui vient de me donner V; mais on peut opérer différemment.

Il suffit, par exemple, d'intégrer l'équation

$$RI + L\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

avec la condition

$$I = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Or, cette intégrale est évidemment

$$I = -\frac{1}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \int_0^t e^{\frac{R}{L}t} \frac{\partial V}{\partial x}\, dt.$$

Digitized by Google

Mais on a

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=\left[\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\frac{x}{l}}{\delta_n}e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\delta_n\cos\delta_n t+\frac{R}{2L}\sin\delta_n t\right)\right]E_0.$$

Tenons compte de la formule de dérivation

$$\left(e^{\frac{R}{2L}t}\sin\delta_n t\right)'=e^{\frac{R}{2L}t}\left(\frac{R}{2L}\sin\delta_n t+\delta_n\cos\delta_n t\right),$$

il vient

$$-\int_0^t e^{\frac{R}{L}t}\frac{\partial V}{\partial x}dt=\left[\frac{L}{Rl}\left(e^{\frac{R}{L}t}-1\right)+\frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\frac{x}{l}}{\delta_n}e^{\frac{R}{2L}t}\sin\delta_n t\right]E_0,$$

d'où, en posant

$$I_0=\frac{E}{Rl},$$

$$\frac{I}{I_0}=1-e^{-\frac{R}{L}t}+4\left(\sum\frac{\cos n\pi\frac{x}{l}}{\frac{L}{R}\delta_n}\sin\delta_n t\right)e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Considérons la série entre parenthèses. On peut développer δ_n suivant les puissances décroissantes de n, on a

$$\delta_n=\frac{n\pi}{l\sqrt{CL}}\left(1+\frac{0}{n^2}\right).$$

Quand n est suffisamment grand, cette série est donc comparable à la série

$$\frac{R}{L}\sum\cos\frac{n\pi x}{l}\times\sin\frac{n\pi}{l\sqrt{CL}}t\times\frac{\sqrt{CL}\,l}{n\pi},$$

dont la dérivée en t est

$$\frac{R}{L}\sum\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi t}{l\sqrt{CL}}.$$

Or, si l'on compare cette valeur à l'une des fonctions u de Heaviside, nous voyons que cette fonction a une valeur constante, sauf pour $x=\frac{t}{\sqrt{CL}}$ où elle devient infinie. Si la dérivée devient infinie, c'est donc que la fonction éprouve en ce point une discontinuité.

Digitized by Google

Comme la fonction a pour période le temps

$$\tau = 2l\sqrt{CL},$$

il en sera de même à toutes les époques distantes de cette même quantité.

On peut aussi considérer l'autre époque de chaque période où le cosinus reprend la même valeur; ce seront encore là des moments où la fonction sera discontinue. Eux aussi seront également espacés, ils correspondent au passage des ondes de retour.

Remarquons que si de la série $\frac{I}{I_0}$ nous retirons, terme à terme, la série qui correspond aux valeurs principales dans le développement des termes suivant les puissances de $\frac{1}{n^2}$, nous obtenons des termes comparables à ceux de la série convergente

$$\sum \frac{1}{n^2},$$

la fonction devient continue. Les discontinuités que $\frac{I}{I_0}$ éprouvera seront donc justement celles dont nous venons d'établir l'existence pour la série des valeurs principales.

Physiquement, l'origine et la cause de ces discontinuités sont évidentes.

Nous avons produit une discontinuité en intercalant brusquement la force électromotrice constante E. Cette discontinuité se propage avec la vitesse $\frac{1}{\sqrt{CL}}$, elle se réfléchit aux extrémités.

D'ailleurs, en même temps qu'elle se propage, si la ligne a de la résistance, il se produit un affaiblissement. Ces propriétés s'appliquent à la fois au potentiel et au courant, sauf que les coefficients de réflexion ne sont pas les mêmes. Le potentiel se réfléchit avec changement de signe à l'extrémité qui est mise à terre.

Observation. — A coup sûr, ces raisonnements faits en considérant des séries divergentes ne sont pas rigoureux, mais je les donne à cause de leur caractère intuitif. Pour plus de rigueur, *voir* Vaschy, *Annales télégraphiques*, novembre-décembre 1898.

Digitized by Google

ÉTUDE DES RACINES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE.

1° Je vais d'abord rappeler la forme des équations du mouvement de l'électricité par un réseau de conducteurs linéaires.

On peut prendre comme variables indépendantes les quantités d'électricité $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui ont traversé une section droite de certains conducteurs depuis l'origine des temps.

Alors les intensités correspondantes sont

$$\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt}.$$

L'énergie électrocinétique T est une fonction définie (forme quadratique positive) de ces intensités, et l'expression des quantités de mouvement est la suivante :

$$p_i = \frac{d}{dt}(b_1^i x_1 + b_2^i x_2 + \ldots + b_n^i x_n) \qquad (b_k^i = b_i^k).$$

De même, l'énergie électrique potentielle W est une forme définie des x, et l'on a

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \Sigma a_k^i x_k \qquad (a_k^i = a_i^k).$$

Enfin, la puissance calorifique J est, elle aussi, une forme définie des intensités, et l'on a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial \frac{dx_i}{dt}} = \frac{d}{dt}\Sigma c_k^i x_k \qquad (c_k^i = c_i^k).$$

Si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont les diverses forces électromotrices, les équations du mouvement sont

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial \frac{dx}{dt}} = e.$$

2° Cette équation générale peut se mettre sous la forme

$$\left(b_1^i \frac{d^2}{dt^2} + c_1^i \frac{d}{dt} + a_1^i\right) x_1 + \left(b_2^i \frac{d^2}{dt^2} + c_2^i \frac{d}{dt} + a_2^i\right) x_2 + \ldots = e_i.$$

L'équation caractéristique de ce système d'équations différentielles

Digitized by Google

s'obtiendra en remplaçant par l'inconnue λ le symbole différentiel $\frac{d}{dt}$ et annulant le déterminant de ces équations.

Si je pose

$$A = \Sigma a_i^k x_i x_k, \qquad B = \Sigma b_i^k x_i x_k, \qquad C = \Sigma c_i^k x_i x_k,$$

le système d'équations que nous venons d'écrire, et où $\frac{d}{dt}$ a été remplacé par λ, a pour déterminant le discriminant de la forme

$$B\lambda^2 + C\lambda + A = 0.$$

Je dis que les racines de ce déterminant sont négatives ou que si les deux racines λ_1 et λ_1' sont imaginaires conjuguées, leur somme

$$\lambda_1 + \lambda_1'$$

est négative.

En effet, supposons d'abord la racine λ réelle, on aura, en désignant par des accents les dérivées

$$\lambda^2 B'_{x_i} + \lambda C'_{x_i} + A'_{x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où

$$\lambda^2 \Sigma x_i B'_{x_i} + \lambda \Sigma x_i C'_{x_i} + \Sigma x_i A_{x_i} = 0$$

et, en vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$\lambda^2 B + \lambda C + A = 0,$$

d'où

$$\lambda < 0,$$

puisque A, B et C sont positifs.

Supposons maintenant que nous sommes dans le cas de deux racines imaginaires conjuguées.

Je remarque tout d'abord que les racines de l'équation en λ ne changent pas par une substitution linéaire. Quand, en effet, λ prend une valeur égale à celle d'une racine du discriminant, la forme

$$\lambda^2 B + \lambda C + A$$

devient réductible à un nombre de carrés indépendants inférieur à n, et cette propriété est évidemment inaltérée par la transformation.

Nous pouvons donc, sans changer les valeurs de λ, effectuer une transformation linéaire. Or, nous savons qu'il existe une transfor-

Digitized by Google

mation linéaire à coefficients réels, telle que A et B soient simultanément réduits à une somme de n carrés positifs.

Supposons cette substitution effectuée et posons

$$\begin{aligned} A &= y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \\ B &= k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \ldots + k_n y_n^2 \end{aligned} \qquad [k_i > 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)].$$

Les équations générales deviennent, pour le cas des deux racines λ_1 et λ_1' imaginaires conjuguées, en accentuant les valeurs de y qui correspondent à la seconde de ces racines :

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 k_i y_i + \lambda_1 C_{y_i} + y_i &= 0, \\ \lambda_1'^2 k_i y_i' + \lambda_1' C_{y_i'} + y_i' &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\lambda_1^2 \Sigma k_i y_i y_i' + \lambda_1 \Sigma y_i' C_{y_i} + \Sigma y_i y_i' - \lambda_1'^2 \Sigma k_i y_i' y_i - \lambda_1' \Sigma y_i C_{y_i'} - \Sigma y_i' y_i = 0.$$

Les termes indépendants de λ se détruisent, et d'ailleurs on a

$$\Sigma y_i' C_{y_i} = \Sigma y_i C_{y_i'},$$

d'après la propriété de la polaire.

Il reste donc, après division par $\lambda_1 - \lambda_1'$ qui est différent de zéro,

$$(\lambda_1 + \lambda_1') \Sigma k_i y_i y_i' + \Sigma y_i' C_{y_i'} = 0.$$

Il est clair que le coefficient de $\lambda_1 + \lambda_1'$ est positif, puisque $y_i y_i'$ est le carré du module de y_i ou de y_i'.

D'autre part, on peut montrer que $y_i' C_{y_i'}$ reste invariable par une substitution linéaire; en ce cas, cette quantité pourra être réduite à la forme

$$\Sigma r i i' \qquad (i, i' \text{ imaginaires conjuguées}),$$

les quantités r étant toutes positives; il suffirait de faire une substitution qui réduise C à une somme de carrés, ce qui est possible puisque J est une forme quadratique définie des intensités.

Pour montrer que $\Sigma y' C_y'$ est invariante, posons

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1^1 z_1 + \alpha_2^1 z_2 + \alpha_3^1 z_3, \\ y_2 &= \alpha_1^2 z_1 + \alpha_2^2 z_2 + \alpha_3^2 z_3, \\ y_3 &= \alpha_1^3 z_1 + \alpha_2^3 z_2 + \alpha_3^3 z_3. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} C_{z_1}' &= C_{y_1}' \alpha_1^1 + C_{y_2}' \alpha_1^2 + C_{y_3}' \alpha_1^3, \\ C_{z_2}' &= C_{y_1}' \alpha_2^1 + C_{y_2}' \alpha_2^2 + C_{y_3}' \alpha_2^3, \\ C_{z_3}' &= C_{y_1}' \alpha_3^1 + C_{y_2}' \alpha_3^2 + C_{y_3}' \alpha_3^3, \end{aligned}$$

Digitized by Google

et

$$z'_1 C'_{z_1} + z'_2 C'_{z_2} + z'_3 C'_{z_3} = y'_1 C'_{y_1} + y'_2 C'_{y_2} + y'_3 C'_{y_3},$$

à la condition de poser

$$\begin{aligned} y'_1 &= \alpha_1^1 z'_1 + \alpha_2^1 z'_2 + \alpha_3^1 z'_3, \\ y'_2 &= \alpha_1^2 z'_1 + \alpha_2^2 z'_2 + \alpha_3^2 z'_3, \\ y'_3 &= \alpha_1^3 z'_1 + \alpha_2^3 z'_3 + \alpha_3^3 z'_3, \end{aligned}$$

c'est-à-dire de soumettre les $(y'z')$ à la même transformation que les (yz).

Mais alors il est clair qu'une quantité telle que la quantité

$$\Sigma r i i',$$

où i et i' sont imaginaires conjuguées, est essentiellement positive; par suite, l'équation en $\lambda_1 + \lambda'_1$ doit donner pour cette quantité une valeur négative.

Donc les racines de l'équation caractéristique sont négatives et, dans le cas où elles ne sont pas réelles, leur partie réelle ne peut pas être positive.

Elle ne peut être nulle que si la chaleur de Joule n'intervient pas.

RELATION ENTRE LE RÉGIME VARIABLE D'ÉTABLISSEMENT D'UN COURANT SOUS FORCE ÉLECTROMOTRICE CONSTANTE ET LE RÉGIME PERMANENT SOUS FORCE ÉLECTROMOTRICE PÉRIODIQUE.

Soit

$$\text{(1)} \qquad E = (R + L\mathfrak{D})i, \qquad \mathfrak{D} = \frac{d}{dt},$$

l'équation d'établissement du courant i, dans un circuit de résistance R, de coefficient de self-induction L, sous l'action d'une force électromotrice constante E; on a

$$\text{(2)} \qquad i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

en supposant $i = 0$ pour $t = 0$.

Supposons maintenant que la force électromotrice, au lieu d'être constante, soit une force électromotrice périodique e,

$$\text{(3)} \qquad e = e_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Digitized by Google

Or, on a

$$e = c_0 \omega \int_0^t \cos(\omega\tau + \varphi)\, d\tau + e_0 \sin\varphi. \tag{4}$$

On a, en effet, même valeur pour $t = 0$ et même dérivée.

D'après la solution (2) supposée connue, il est évident que pour la solution de l'équation (5),

$$e = (R + L(\mathfrak{D})i, \tag{5}$$

on aura

$$i = \int_0^t \frac{e_0 \omega \cos(\omega\tau + \varphi)}{R} \left(1 + e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\right) d\tau + \frac{e_0 \sin\varphi}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{6}$$

Car, à chaque instant, chaque élément de e dans (4) agit comme une force constante qui entre en jeu après l'élément précédent; l'élément en $\cos(\omega\tau + \varphi)\, d\tau$ commence à agir à l'époque τ, et contribuera à la valeur de i au temps t pour la valeur que le courant qui lui serait dû aura au bout du temps $t - \tau$.

Posons

$$\beta = \frac{R}{L}, \qquad r^2 = \omega^2 + \beta^2, \qquad r\cos\theta = +\frac{R}{L}, \tag{7}$$

nous aurons

$$\int_0^t \cos(\omega\tau + \varphi)\, e^{-\beta(t-\tau)}\, d\tau = \frac{1}{r}\left[\cos(\omega t + \varphi - \theta) - \cos(\varphi - \theta)\, e^{-\beta t}\right]. \tag{8}$$

car l'intégrale indéfinie est

$$\frac{1}{r}\cos(\omega\tau + \varphi - \theta)\, e^{-\beta(t-\tau)} + \text{const.},$$

d'où

$$i = \frac{e_0}{R}\left[\sin(\omega t + \varphi) - \sin\varphi\right] - \frac{e_0 \omega}{rR}\left[\cos(\omega t + \varphi - \theta) - \cos(\varphi - \theta)\, e^{-\beta t}\right] + \frac{e_0}{R}\sin\varphi\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \tag{9}$$

ou en supprimant les termes qui se détruisent

$$\frac{e_0}{R}\left[\sin(\omega t + \varphi) - \frac{\omega}{r}\cos(\omega t + \varphi - \theta)\right] + e^{-\beta t}\frac{e_0}{R}\left[\frac{\omega}{r}\cos(\varphi - \theta) - \sin\varphi\right]. \tag{10}$$

Digitized by Google

Mais on a

$$(11)\quad \frac{e_0}{R}\left[\frac{\omega}{r}\cos(\varphi-\theta)-\sin\varphi\right]$$
$$=\frac{e_0}{R}[\sin\theta(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)-\sin\varphi]=e_0\frac{\cos\theta}{R}\sin(\theta-\varphi);$$

or, on a

$$(12)\qquad \frac{\cos\theta}{R}=\frac{1}{Lr}=\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}};$$

puis, par le même calcul, où φ est remplacé par $\omega t+\varphi$, on a

$$\sin(\omega t+\varphi)-\sin\theta\cos(\omega t+\varphi-\theta)=\cos\theta\sin(\omega t+\varphi-\theta).$$

Il reste donc

$$(13)\qquad i=\frac{e_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\left[\sin(\omega t+\varphi-\theta)+\sin(\theta-\varphi)e^{-\frac{R}{L}t}\right],$$

ce qui, pour $t=0$, donne bien $i=0$.

Inversement, de la solution de régime permanent périodique

$$(14)\qquad i=\frac{e_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi-\theta),$$

il est facile de tirer la solution (2).

Soit plus simplement

$$(15)\qquad i=Ae^{\omega t\sqrt{-1}},$$

la solution isochrone de l'équation

$$(16)\qquad (R+L\mathfrak{D})i=e_0e^{\omega t\sqrt{-1}}.$$

On aura, par substitution,

$$(17)\qquad (R+L\omega\sqrt{-1})A=e_0,$$

d'où

$$(18)\qquad i=\frac{e_0}{R+L\omega\sqrt{-1}}e^{\omega t\sqrt{-1}}.$$

Mais, ω étant une quantité imaginaire, on a

$$(19)\qquad e_0=\frac{e_0}{2\pi\sqrt{-1}}\int e^{\omega t\sqrt{-1}}\frac{d\omega}{\omega},$$

Digitized by Google

en intégrant le long d'un contour quelconque embrassant une fois l'origine, d'où la solution

$$(20)\qquad i = \frac{e_0}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{e^{\omega t\sqrt{-1}}\,d\omega}{\omega(R + L\omega\sqrt{-1})} = \frac{e_0}{2\pi\sqrt{-1}\,R}\int\left(\frac{e^{\omega t\sqrt{-1}}}{\omega} - \frac{e^{\omega t\sqrt{-1}}}{\omega + \frac{R}{L\sqrt{-1}}}\right)d\omega.$$

Intégrons le long d'un contour qui embrasse à la fois le pôle $\omega = 0$ et le pôle

$$\omega = -\frac{R}{L\sqrt{-1}},$$

il viendra cette solution particulière :

$$(21)\qquad i = \frac{e_0}{R} - \frac{e_0}{R}e^{\sqrt{-1}\left(-\frac{R}{L\sqrt{-1}}\right)t} = \frac{e_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

qui est justement celle qui pour $t = 0$ se réduit à zéro.

Digitized by Google

CHAPITRE XV.

L'ANTENNE (PARTIE MÉCANIQUE).

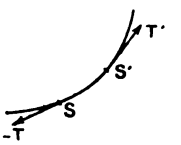
I. Cette partie du chapitre est consacrée à l'étude de la chaînette et au calcul mécanique de la solidité d'une nappe de fils d'antenne.

LES FILS D'ANTENNE. LA CHAINETTE.

1° On appelle chaînette la figure d'équilibre d'un fil pesant homogène flexible et inextensible tendu entre deux points fixes.

Par raison de symétrie, la courbe est tout entière située dans le plan vertical des points d'attache.

Fig. 40.



Cherchons les conditions d'équilibre d'une portion SS' d'arc de chaînette. Sur les éléments matériels extrêmes S et S' agissent les tensions dues aux éléments contigus, puis sur chaque élément de longueur ds agit son poids pds, force verticale.

Soit T' la force de tension en S', nous devons appeler — T la force due à la tension qui s'exerce en S sur la portion considérée, le poids de cette portion sera $p(s'-s)$ et comme les forces de réaction intérieures sont deux à deux égales et opposées, ces trois forces seront en équilibre.

Soit φ l'angle de T avec l'horizontale, φ' l'angle formé de même par T' avec l'horizontale.

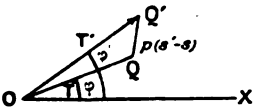
Digitized by Google

Le parallélogramme des forces donne la relation

$$(1)\qquad \frac{T}{\cos\varphi'} = \frac{T'}{\cos\varphi} = \frac{p(s'-s)}{\sin(\varphi'-\varphi)} \qquad \text{(analogies des sinus).}$$

Si, en particulier, S_0 est le point le point le plus bas, la tension y

Fig. 41.



devient horizontale et prend la valeur que nous appellerons T_0, et l'on aura, en appelant s l'arc de chaînette, compté à partir de S_0,

$$(2)\qquad T\cos\varphi = T_0,$$

$$(3)\qquad T_0 \operatorname{tang}\varphi = ps,$$

$$(4)\qquad T\sin\varphi = ps,$$

$$(5)\qquad T^2 = T_0^2 + p^2 s^2.$$

En effet le triangle des forces (OQQ') devient rectangle.

L'équation (2) donne la tension en un point quelconque en fonction de la tension au point le plus bas et de l'angle φ.

L'équation (3) donne la relation entre le coefficient angulaire de la tangente et l'arc s compté à partir du point le plus bas et dans le sens où φ croît; c'est l'équation naturelle de la courbe.

L'équation (5) donne la tension au point le plus bas et le poids de l'arc de chaînette entre ces deux points.

L'équation (4) donne la tension au point le plus haut en fonction du coefficient angulaire et de la longueur d'arc à partir du point bas.

2° On peut retrouver ces résultats au moyen du principe des vitesses virtuelles. Je prends deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy; l'axe Ox horizontal, l'axe Oy vertical dirigé vers le haut.

Si p est le poids par unité de longueur, l'énergie potentielle est

$$(6)\qquad W = \int_{s_1}^{s_2} yp\,ds,$$

on a d'ailleurs

$$(7)\qquad y = \int_{s_1}^{s_2} \sin\varphi\,ds$$

Digitized by Google

et si l est la longueur donnée de la chaînette, on a

$$l = s_2 - s_1. \tag{8}$$

Cette chaînette est attachée à deux points $A_1(x_1 y_1)$ et $A_2(x_2 y_2)$.

Soit ω l'angle de A_1A_2 avec l'horizontale. Projetons la ligne A_1A_2 sur un axe faisant un angle θ avec l'horizontale, et projetons de même tous les éléments de la chaînette, nous avons

$$\int_{s_1}^{s_2} \cos(\varphi - \theta)\, ds = d\cos(\omega - \theta), \tag{9}$$

d étant la longueur de $\overline{A_1A_2}$.

Je pose

$$K = \int_{s_1}^{s_2} \cos(\varphi - \theta)\, ds, \qquad I = \int_{s_1}^{s_2} (s - s_0)\sin\varphi\, ds, \tag{10}$$

j'aurai, d'après (6), en intégrant par parties,

$$\frac{1}{p} W = y_2(s_1 - s_0) - y_1(s_1 - s_0) - I, \tag{11}$$

et comme y_1, y_2, s_1, s_2 d'une part, d, ω, θ d'autre part, sont des constantes, l'équation d'équilibre s'obtiendra, comme on sait, en écrivant que, si l'on donne à φ (qui est une certaine fonction de s) une variation $\delta\varphi$, arbitraire, mais telle cependant que K conserve une valeur constante pour tenir compte des liaisons, δW et par conséquent δI s'annule.

Or, si la variation de φ prend successivement les valeurs $\delta\varphi'$ et $\delta\varphi''$, soient $\delta K'$ et $\delta K''$ les variations éprouvées par K, et $\delta I'$, $\delta I''$ celles de I; supposons alors qu'on donne à φ la variation

$$\delta K'\,\delta\varphi'' - \delta K''\,\delta\varphi',$$

il en résultera pour K la variation

$$\delta K'\,\delta K'' - \delta K''\,\delta K'$$

qui est identiquement nulle, et pour I la variation δI

$$\delta I = \delta K'\,\delta I'' - \delta K''\,\delta I', \tag{12}$$

laquelle devra être nulle, puisque la variation correspondante de K

Digitized by Google

est elle-même égale à zéro. On aura donc

$$\frac{\delta I'}{\delta K'} = \frac{\delta I''}{\delta K''}. \tag{13}$$

La valeur commune de ces rapports est une quantité $-\lambda$ indépendante de la variation particulière donnée à φ. On aura donc à écrire qu'on a

$$\delta I + \lambda\,\delta K = 0, \tag{14}$$

λ étant une constante qui dépendra seulement de θ.

Or, on a

$$\delta I = \int_{s_1}^{s_2} (s - s_1)\cos\varphi\,\delta\varphi\,ds, \qquad \delta K = \int_{s_1}^{s_2} -\sin(\varphi - \theta)\,\delta\varphi\,ds, \tag{15}$$

d'où, en annulant le coefficient de $\delta\varphi$, sous le signe $\int$, dans l'expression (14),

$$(s - s_0)\cos\varphi - \lambda\sin(\varphi - \theta) = 0; \tag{16}$$

l'origine de l'arc s est jusqu'à présent restée indéterminée. Pour $\varphi = \theta$, on a $s = s_0$, d'après (16).

Si nous supposons, par exemple, que nous comptions les arcs à partir du point le plus bas, nous devons faire $\theta = 0$ et il restera, λ_0 étant une constante,

$$s\cos\varphi - \lambda_0\sin\varphi = 0; \tag{17}$$

cette équation, qui est l'équation naturelle de la chaînette, se confondra avec (3), si nous posons

$$\lambda_0 = \frac{1}{p}\,T_0. \tag{18}$$

Nous retrouvons donc les résultats précédents, et nous voyons, puisque nous avons annulé δW, que W est maximun ou minimum; mais le fil étant infiniment flexible ne peut former une arche, donc W est minimum. Soit y_G l'y du centre de gravité, on a

$$ply_G = \int_{s_1}^{s_2} y p\,ds = W. \tag{19}$$

Donc le centre de gravité est au point le plus bas compatible avec les liaisons.

Digitized by Google

3° Je pose, à la place de λ_0, conformément à l'usage,

$$a = \frac{T_0}{p}. \tag{20}$$

L'équation à intégrer est

$$s = ay'. \tag{21}$$

Écrivons u au lieu de y', nous aurons, en différentiant (21),

$$ds = a\,du$$

ou

$$\sqrt{1+u^2}\,dx = a\,du$$

ou

$$\frac{dx}{a} = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}, \tag{22}$$

d'où

$$\log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) = \frac{x-x_0}{a} \qquad (x_0, \text{ constante arbitraire})$$

ou

$$\begin{cases} u+\sqrt{1+u^2} = e^{\frac{x-x_0}{a}}, \\ -u+\sqrt{1+u^2} = e^{\frac{-(x-x_0)}{a}}, \end{cases} \tag{23}$$

et

$$y' = u = \frac{e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}}}{2} = \operatorname{sh}\frac{x-x_0}{a}; \tag{24}$$

d'où, en intégrant,

$$y - y_0 = a\,\frac{e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}}{2} = a\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{a}, \tag{25}$$

y_0 étant une nouvelle constante arbitraire (le point x_0y_0 n'étant pas sur la chaînette; la droite $y = y_0$ s'appelle la base de la chaînette).

Si je pose

$$Y = y - y_0, \qquad X = x - x_0,$$

l'équation (25) devient

$$Y = a\operatorname{ch}\frac{X}{a}; \tag{26}$$

l'origine est portée au point x_0y_0; pour $x = x_0$, on a $y = y_0 + a$. Si a est positif, l'origine est donc au-dessous de la chaînette; au

Digitized by Google

point $x = x_0$, on a $y' = 0$; c'est donc le point où la tangente est horizontale, et comme y'' est positif si a est positif, la chaînette tourne sa concavité vers le haut.

Enfin, si nous prenons a pour unité de longueur, en écrivant

$$Y' = \frac{Y}{a}, \qquad X' = \frac{X}{a},$$

il vient l'équation réduite

$$Y' = \operatorname{ch} X'.$$

Donc toutes chaînettes sont semblables.

CONDITIONS AUX LIMITES.

4° Je simplifierai les notations en portant l'origine au point A_1 dont les coordonnées seront $(x_1 = 0, y_1 = 0)$. J'appellerai (α, β) les coordonnées du point A_2 que j'appelais précédemment $(x_2 y_2)$. Je puis diriger l'axe Ox de façon que α soit positif. Enfin, j'admets que j'aie choisi pour A_1 le point d'attache le plus bas, donc β sera positif également.

Donc

$$\alpha > 0, \qquad \beta > 0.$$

Il s'agit de déterminer a_1, x_0, y_0 de façon que la chaînette passe par A_1 et par A_2 et que la longueur entre ces deux points soit égale à la longueur l du fil tendu.

Le fil passant par $A_1(0, 0)$ et par $A_2(\alpha, \beta)$, on a

$$(26) \qquad -y_0 = a \operatorname{ch} \frac{-x_0}{a}, \qquad \beta - y_0 = a \operatorname{ch} \frac{\alpha - x_0}{a}.$$

D'après (21), on a

$$(27) \qquad l = a \left(\operatorname{sh} \frac{\alpha - x_0}{a} - \operatorname{sh} \frac{-x_0}{a} \right).$$

De (26) on tire, en éliminant y_0,

$$(28) \qquad \beta = a \left(\operatorname{ch} \frac{\alpha - x_0}{a} - \operatorname{ch} \frac{-x_0}{a} \right).$$

Entre (27) et (28), il y a à éliminer x_0. Or on a

$$(29) \qquad l - \beta = a \left(e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} \right) = a e^{-\frac{x_0}{a}} \left(e^{\frac{\alpha}{a}} - 1 \right),$$

$$(30) \qquad l - \beta = a \left(-e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}} \right) = a e^{\frac{x_0}{a}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{a}} \right).$$

Digitized by Google

Multiplions, membre à membre, (29) et (30), il vient

$$(31)\qquad l^2-\beta^2=a^2\left(e^{\frac{\alpha}{a}}-2+e^{-\frac{\alpha}{a}}\right)=a^2\left(e^{\frac{\alpha}{2a}}-e^{-\frac{\alpha}{2a}}\right)^2=4a^2\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2a}\right)^2$$

ou

$$(3)\qquad \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2a}=\pm\frac{\sqrt{l^2-\beta^2}}{2a}\qquad\text{ou}\qquad\frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2a}}{\frac{\alpha}{2a}}=\pm\frac{\sqrt{l^2-\beta^2}}{\alpha}.$$

On peut prendre pour inconnue

$$(33)\qquad \tau=\frac{\alpha}{2a}$$

à la place de a. Or, $\frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}$ est une fonction paire de τ, qui croît de 1 à $+\infty$ et constamment avec τ, comme on le voit par le développement en série suivant les puissances de τ; il faut donc prendre le signe $+$.

Comme $\frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}$ est plus grand que 1, on doit avoir

$$\frac{l^2-\beta^2}{\alpha^2}>1\qquad\text{ou}\qquad l^2>\alpha^2+\beta^2.$$

La longueur de la chaînette doit être supérieure au segment A_1A_2. Dès lors, il y a une racine et une seule réelle en τ. Il n'y a qu'une solution, qu'une seule chaînette répondant à la question.

TENSIONS AUX POINTS LE PLUS HAUT ET LE PLUS BAS.

5° Reprenons les équations (1), on a, d'après les deux premières

$$(34)\qquad T\cos\varphi=T'\cos\varphi'=\text{const.}$$

et si l'on applique l'égalité du premier et du troisième rapport à un élément infiniment petit ds, on a aussi l'équation suivante qui donne le rayon de courbure $\rho=\frac{ds}{d\varphi}$ de la courbe

$$(35)\qquad T=p\frac{ds}{d\varphi}\cos\varphi\qquad\text{ou}\qquad\rho=\frac{T_0}{p}\frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

L'équation (34) peut s'écrire

$$(36)\qquad T\frac{dx}{ds}=T_0.$$

Digitized by Google

Mais on a

$$ds = \sqrt{1 + u^2}\, dx$$

ou, d'après (23) et (25),

$$(37) \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + u^2} = \frac{e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{x - x_0}{a}}}{2} = \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{a},$$

d'où, en reportant dans (36),

$$(36\,bis) \qquad T = T_0 \frac{y - y_0}{a}$$

ou, d'après (20),

$$(38) \qquad T = p(y - y_0).$$

Donc si SH est la distance d'un point S de la chaînette à la *base* de la chaînette, la tension T en S est égale au poids qu'aurait la portion SH du fil.

Entre deux points (x, y) (x', y') où les tensions sont T et T', on a

$$T' - T = p(y' - y).$$

Si les points d'attache sont au même niveau et si la flèche a pour valeur h, T_0 étant toujours la tension au point le plus bas, on a

$$T - T_0 = ph.$$

Remarque. — L'élimination de ds entre (35) et (36) donne

$$dx = a \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

ce qui redonne l'équation (22) par une voie légèrement différente.

FORMULES.

6° Je pose, x_0 étant l'abscisse du point le plus bas (24),

$$v = \frac{p}{T_0}(x - x_0);$$

l'équation (48) donne

$$\frac{T}{T_0} = 1 + p\frac{h}{T}.$$

Digitized by Google

L'équation (36*bis*) et l'équation (25) donnent

$$1+\frac{p}{T_0}h=\frac{T}{T_0}=\frac{y-y_0}{a}=\operatorname{ch}\nu \qquad \left(a=\frac{T_0}{p}\right)$$
$$(y-y_0=h).$$

Enfin on a, d'après (24) et (3),

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang}\varphi=\operatorname{sh}\nu=\frac{ps}{T_0}.$$

Définitions. — En télégraphie sous-marine, le mou μ est défini par l'équation

$$1+\mu=\frac{s}{x-x_0}.$$

La touée τ est définie par l'équation

$$1+\tau=\frac{s}{y-y_0} \qquad \text{ou} \qquad 1+\tau=\frac{s}{h}.$$

On a alors les formules suivantes :

(I) $$p\frac{x-x_0}{T_0}=\nu=\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),$$

(II) $$\frac{T_0+ph}{T_0}=\operatorname{ch}\nu=\sec\varphi,$$

(III) $$\frac{ps}{T_0}=\operatorname{sh}\nu=\operatorname{tang}\varphi,$$

(IV) $$1+\mu=\frac{s}{x-x_0}=\frac{\operatorname{sh}\nu}{\nu}=\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)},$$

(V) $$\frac{T_0+ph}{p(x-x_0)}=\frac{\operatorname{ch}\nu}{\nu}=\frac{\sec\varphi}{\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)},$$

(VI) $$1+\tau=\frac{s}{h}=\frac{1+\operatorname{ch}\nu}{\operatorname{sh}\nu}=\cot\frac{\varphi}{2},$$

(VII) $$\frac{h}{x-x^0}=\frac{\operatorname{ch}\nu-1}{\nu}=\frac{\sec\varphi-1}{\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

(VIII) $$\frac{ps}{T_0+ph}=\operatorname{th}\nu=\sin\varphi,$$

(IX) $$\frac{T_0}{ph}=\frac{1}{\operatorname{ch}\nu-1}=\frac{1}{2}\left(\cot^2\frac{\varphi}{2}+1\right),$$

(X) $$\frac{T_0+ph}{ph}=\frac{\operatorname{ch}\nu}{\operatorname{ch}\nu-1}=\frac{1}{2}\left(\cot^2\frac{\varphi}{2}+1\right).$$

Digitized by Google

Ces formules données par M. Larose, ingénieur, chef du service des câbles sous-marins dans les *Annales télégraphiques* de novembre-décembre 1898, y sont accompagnées de courbes et de tables numériques, avec de nombreux exemples des problèmes qu'elles permettent de résoudre, soit qu'il s'agisse de lignes aériennes ou de la pose des câbles sous-marins ou d'opérations de dragages, soit qu'il s'agisse du régime permanent d'une ligne électrique soumise à une force électromotrice constante en tenant compte de la résistance d'isolement par unité de longueur.

FORMULES DES FORMULAIRES.

Considérons la formule (VII), développons $\frac{\operatorname{ch} v - 1}{v}$ en série, bornons-nous au premier terme, ce qui suppose que

$$v = \frac{p}{T_0}(x - x_0)$$

est une quantité petite, hypothèse vraie si T_0 est grand par rapport au poids pl de la chaînette, et il vient, en posant

$$d = 2(x - x_0),$$

la formule connue :

$$(a) \qquad h = \frac{p d^2}{8 T_0};$$

h, flèche en centimètres;

d, distance en centimètres des points d'appuis, supposés au même niveau, portée;

T_0, tension au point le plus bas en kilogrammes;

p, poids linéaire du fil en kilogrammes : centimètres.

On peut aussi exprimer p en kilogrammes : centimètres cubes, ce sera alors la densité du fil, et T_0 en kilogrammes : centimètres carrés, ce sera alors, non la force de tension, mais la tension par centimètre carré, quantité de même nature qu'une pression.

Considérons de même la formule (III) et effectuons le développement en série dans les mêmes conditions, on a

$$\frac{p s}{T_0} = v + \frac{v^3}{6};$$

faisons

$$s = \frac{l}{2}, \qquad v = \frac{p}{T_0}\frac{d}{2},$$

Digitized by Google

il vient

$$l = d + \frac{1}{3}\frac{p^2 d^3}{T_0^2 \times 8}$$

et, d'après (a), on a alors cette formule bien connue :

$$(b) \qquad l = d + \frac{8h^2}{3d} \qquad (l \text{ longueur de la chaînette en cm}).$$

Cette formule donne la longueur du fil correspondant à une flèche h et à une portée d connue.

Examinons enfin l'effet d'une variation de tension, au point le plus bas. Ladite variation de tension peut provenir d'un changement de température. Celle-ci provoquera donc une modification de la flèche qui sera d'ailleurs atténuée par l'allongement élastique du fil.

Les formules (b) donnent pour les flèches h et h' les longueurs géométriques l et l' de la chaînette, c'est-à-dire

$$l = d + \frac{8}{3}\frac{h^2}{d},$$

$$l' = d + \frac{8}{3}\frac{h'^2}{d},$$

d'où, par différence,

$$l' - l = \frac{8}{3}\frac{1}{d}(h'^2 - h^2).$$

Supposons qu'à la flèche h corresponde la tension T_0 au point le plus bas et à la flèche h' la tension T'_0, la formule (a) donnera

$$h = \frac{pd^2}{8}\frac{1}{T_0},$$

$$h' = \frac{pd^2}{8}\frac{1}{T'_0},$$

d'où

$$h'^2 - h^2 = \frac{p^2 d^4}{8^2}\left(\frac{1}{T'^2_0} - \frac{1}{T^2_0}\right).$$

Il vient donc

$$l' - l = \frac{p^2 d^3}{24}\left(\frac{1}{T'^2_0} - \frac{1}{T^2_0}\right).$$

Si la flèche est petite, l et l' diffèrent peu de d et si l'on appelle γ le coefficient d'extension élastique, δ le coefficient de dilatation thermique, on aura sensiblement

$$l' - l = d[\gamma(T'_0 - T_0) + \delta(t' - t)]$$

Digitized by Google

pour une variation de tension $T'_0 - T_0$ corrélative d'une augmentation de température $t' - t$. En comparant les deux dernières expressions de $l' - l$, on obtient la formule suivante, dont Blondel a dressé l'abaque :

$$(c) \qquad \frac{p^2 d^2}{24}\left(\frac{1}{T_0'^2} - \frac{1}{T_0^2}\right) = \gamma(T'_0 - T_0) + \delta(t' - t).$$

Si T_0 est exprimé en kg : cm², γ doit être exprimé en cm² : kg.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE MÉCANIQUE DE L'ANTENNE.

Données :

Fil d'antenne en cuivre de 6^{mm} de diamètre;
Travail du métal, environ $14^{kg},500$ par millimètre carré;
Pression du vent, 200^{kg} par millimètre carré;
Coefficient de correction pour surface courbe, 0,57;
Densité, 8,1;
Section, $28^{mm^2},1$;
Poids du mètre, $0^{kg},227$;
Pression du vent sur une longueur de fil de 1^m :

$$0,57(6 \times 1000) \times 0,002 = 0^{kg},685.$$

Poids apparent du fil (force résultante due à son poids et au vent), $0^{kg},700$ par mètre;
Tension au point le plus bas : section × travail du métal :

$$28,1 \times 14,5 = 407^{kg}.$$

Calcul de la flèche d'un fil d'antenne :

$$f = \frac{a^2 p}{8ts},$$

a, portée; p, poids apparent; t, tension au point le plus bas; s, section;

$$f = \frac{400^2 \times 0,70}{8 \times 407} = 34^m,6.$$

Tension au point le plus haut :

$$t = 407 + 0,70 \times 34,6 = 431^{kg}.$$

Digitized by Google

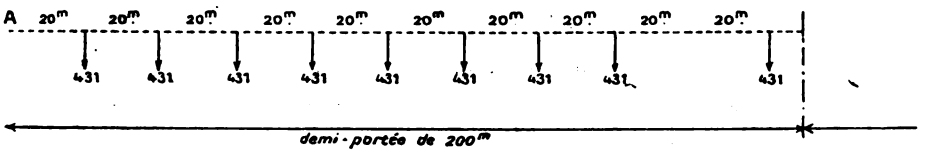
CALCUL DE LA TENSION AU POINT D'ATTACHE DU TRAVERSIER.

Données :

Demi-portée de 200^{m}.

Flèche tolérée *a priori*, 50^{m}.

Fig. 42.



1° Calcul de la tension T_0 au point le plus bas. On prend les moments par rapport à A :

$$T \times 50 = 20(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)\,431^{kg},$$
$$T_0 = 22 \times 431 = 9482^{kg}.$$

2° Tension T au point le plus haut. Poids apparent :

$$\frac{431 \times 10}{200} = 21^{kg} \text{ environ}, \qquad \text{flèche } 50^{m}.$$
$$T = T_0 + pf = 9482 + 21 \times 50 = 10\,532^{kg}.$$

Vérification du calcul relatif au brin d'antenne avec les tables de Larose :

Flèche y, demi-portée x.				Rapport de la tension (6) au poids (5).	Poids apparent.	Tension au point haut.		
$\frac{y}{x}$.	x.	y.	Δ.				Δ.	
(1).	(2).	(3).		(4).	(5).	(6).	(7).	
0,178	200^{m}	35,6	1,8	3,01	140	421,4	19,6	(1)
0,169	200	33,8	1,6	3,15	140	441	19,0	(1)
0,161	200	32,2		3,29	140	460		

(1) Si, pour 1^{m},8 de flèche en moins, on a 19^{kg},6 en plus, pour 9^{kg},6 en plus, soit 421,4 + 9,6 = **431**^{kg}, quelle flèche aura-t-on?

$$\frac{x}{1,8} = \frac{9,6}{19,6}, \qquad x = 0,88.$$
$$35,6 - 0,88 = 34,72,$$

ci-dessus 34,6.

Digitized by Google

Les nombres des colonnes (1) et (4) sont les nombres empruntés à la table de Larose.

$\Delta \equiv$ différence tabulaire.

II. Cette section est consacrée à l'étude des formules à employer pour s'assurer de la solidité mécanique des supports d'antenne.

COMPRESSION D'UN PRISME.

Considérons un solide en forme de prisme droit reposant sur un plan rigide et fixe horizontal et soumis à l'action de forces verticales uniformément réparties sur sa face supérieure.

Ces forces ont une résultante P normale à cette face.

Elles font éprouver au prisme une déformation, qui se réduit en première approximation à un simple raccourcissement dans le sens vertical.

Si cette diminution de longueur est $l - l'$, l étant la longueur primitive du prisme et si S est la surface de la section droite, on aura

$$P = ES\frac{l - l'}{l},$$

le coefficient E étant le coefficient de compression longitudinal ou module d'Yung.

Entre deux points où la différence de potentiel est $V - V'$, la loi d'Ohm nous donne de même pour l'intensité I

$$I = cS\frac{V - V'}{l},$$

c étant la conductibilité spécifique.

Dans les applications, le parallélisme de ces deux formules peut être poussé assez loin.

J'appellerai *axe du prisme* le lieu des centres de gravité des diverses sections droites.

Je suppose que la force verticale P qui agit sur la base supérieure soit suffisante pour faire fléchir le prisme.

J'admets que le prisme a un plan de symétrie passant par son axe et que la force P a son point d'application dans ce plan à une distance a de l'axe.

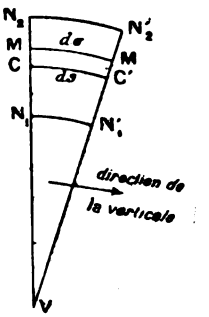
Dans ces conditions, le prisme solide se déforme de façon que l'axe

Digitized by Google

devient une courbe, dont les deux extrémités restent sur l'axe primitif, l'extrémité inférieure reste butée contre l'obstacle et le centre de gravité de la face supérieure éprouve seulement un petit déplacement vertical. Cette courbe tourne sa concavité vers la partie du plan de flexion située vers la droite, si c'est à droite de l'axe qu'est le point d'application de la force P.

On appelle *fibre* une file d'éléments matériels parallèles à l'axe. Au cours de la déformation, les sections primitivement normales à la fibre moyenne restent des sections planes et ces sections restent normales à la fibre moyenne déformée.

Fig. 43.



Soient, après la déformation :

$ds = CC'$;

C et C', deux points matériels voisins de la fibre moyenne;

$N_1 N_2$, $N'_1 N'_2$, les sections en C et C';

V, le centre de courbure de CC' en C;

$\rho = VC$, le rayon de courbure correspondant de la fibre moyenne;

$mm' = d\sigma$, l'élément d'une fibre déformée;

$MM' = d\sigma$ (on a $mm' = MM'$), la projection de l'élément mm' sur le plan de flexion;

$u = CM$, la distance de la fibre en question à la droite perpendiculaire au plan de flexion projetée en C.

On a

$$d\sigma = ds\left(1 + \frac{u}{\rho}\right).$$

Distinguons par l'indice zéro les lettres qui se rapportent à l'état

Digitized by Google

initial, nous aurons

$$d\sigma_0 = ds_0,$$

d'où

$$\frac{d\sigma - d\sigma_0}{d\sigma_0} = \frac{ds - ds_0 + ds\,\frac{u}{\rho}}{ds_0}.$$

Je pose

$$\delta = \frac{d\sigma - d\sigma_0}{ds_0}, \qquad \delta_c = \frac{ds - ds_0}{ds_0},$$

et j'ai

$$\delta = \delta_c + \frac{u}{\rho}\,\frac{ds}{ds_0}.$$

On pourra, en général, remplacer $\frac{ds}{ds_0}$ par l'unité.

Examinons maintenant les conditions d'équilibre de la partie du prisme comprise entre sa surface libre et la section N_1N_2. Les forces extérieures sont d'une part la force donnée P, d'autre part les tensions données par les diverses fibres. Ces tensions, qui sont des tensions positives ou négatives, c'est-à-dire des tensions ou des compressions, sont des forces exercées par les éléments matériels contigus appartenant à la partie inférieure sur les éléments de la base N_1N_2 de la portion considérée.

Nous allons écrire que la somme des forces projetées sur l'axe primitif du prisme est égale à zéro et que le moment résultant pris par rapport à l'axe projeté en C est aussi égal à zéro.

Nous aurons tout d'abord, en appelant $d\omega$ la section droite d'une fibre,

$$P + \int E\,d\omega\,\delta = 0,$$

d'où

$$P = -ES\,\delta_c,$$

puisque l'on a

$$\int d\omega = S, \qquad \int u\,d\omega = 0.$$

Remarquons que l'on aura

$$\frac{ds_0}{ds} = \frac{1}{1 - \frac{P}{ES}}.$$

Ensuite l'équation des moments donnera, en appelant y la distance

Digitized by Google

d'un point C de la fibre moyenne déformée à l'axe, x sa distance à la surface libre

$$E\int d\omega\, u\,\delta - P(y+a) = 0.$$

On voit, en effet, que la force P a un moment qui tend à faire tourner dans un sens la portion considérée, tandis que le moment des forces élastiques tend à le faire tourner en sens inverse.

Je pose maintenant

$$I = \int u^2\, d\omega,$$

I sera le moment d'inertie de la section N_1N_2. Si donc je remplace δ par sa valeur, j'aurai

$$-P(a+y) + E\int d\omega\, u\left(\delta_0 + \frac{u}{\rho}\frac{ds}{ds_0}\right) = 0$$

ou

$$\frac{EI}{\rho}\frac{ds}{ds_0} - P(y+a) = 0.$$

Mais comme la courbure est dirigée du côté des y négatifs, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0,$$

et, comme jusqu'ici ρ a été pris en valeur absolue, on a

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

On a donc

$$\frac{EI\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{P(y+a}{1-\dfrac{SE}{P}}.$$

C'est cette équation que je vais étudier.

Je vais examiner trois cas.

1° Hypothèses : $a = 0$, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ négligeable devant l'unité.

Digitized by Google

Je pose, pour simplifier l'écriture,

$$Q = \frac{P}{1 - \frac{P}{ES}},$$

$$k^2 = \frac{Q}{EI}$$

et l'équation de l'élastique devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 y,$$

d'où, en intégrant,

$$y = A \sin kx + B \cos kx.$$

Pour $x = 0$, c'est-à-dire pour la surface libre, on a

$$y = 0,$$

d'où

$$B = 0.$$

Pour $x = l$, l étant la longueur de la pièce, on doit avoir aussi

$$y = 0,$$

d'où

$$A \sin kl = 0,$$

c'est-à-dire soit

$$A = 0,$$

soit

$$\sin kl = 0;$$

si l'on a

$$A = 0,$$

la pièce reste droite.
Si l'on a

$$\sin kl = 0,$$

il vient

$$kl = n\pi \qquad (n \text{ entier});$$

d'où, pour la première valeur de n, c'est-à-dire l'unité,

$$Q = \frac{\pi^2}{l^2} EI \qquad \text{(formule d'Euler)}.$$

Pour cette valeur, la pièce peut s'infléchir, c'est-à-dire flamber. Si A reste inférieur à cette valeur, le flambage ne se produit pas. Cette valeur est donc une limite de sécurité.

La formule est dite formule d'Euler.

Remarque. — Cette analyse ne nous apprend rien sur la flèche.

Digitized by Google

2° $a \neq 0$: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ toujours négligeable devant l'unité.

On a

$$y'' = -k^2(y+a),$$
$$y + a = A \sin kx + B \cos kx$$

ou

$$y + a = a \frac{\cos\left(kx - \frac{kl}{2}\right)}{\cos\frac{kl}{2}}$$

ou

$$y = -2a \frac{\sin\frac{kx}{2}\sin k\frac{x-l}{2}}{\cos\frac{kl}{2}}.$$

On voit que si Q atteint la valeur pour laquelle on a

$$\frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad kl = \pi,$$

valeur que nous avons déjà envisagée précédemment, et qui est indépendante de a, le dénominateur devenant nul, y devient infini.

Nous retrouvons encore la formule d'Euler.

3° Revenons encore au cas de $a = 0$.

On peut obtenir la valeur de la flèche, en partant de la formule complète

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -k^2 y.$$

Multiplions par $\frac{dy}{dx}$ et intégrons, il vient

$$2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = k^2 y^2 + \text{const.}$$

Mais si j'appelle f la flèche, c'est-à-dire la valeur de y au milieu de la pièce; en ce point, j'ai aussi

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Digitized by Google

La constante se trouve donc ainsi déterminée, et j'ai

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 1 - k^2(f^2 - y^2).$$

Je pose

$$k^2(f^2 - y^2) = u,$$

et j'ai

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{1-u}, \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{(1-u)^2},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{(1-u)^2} - 1, \qquad \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{(1-u)^2} - 1},$$

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{(1-u)^2} - 1}$$

ou

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{\frac{1}{(1-u^2)} - 1 + 1}{\frac{1}{(1-u^2)} - 1} = \frac{1}{1-(1-u)^2} = \frac{1}{2u-u^2}$$

ou

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}}.$$

Mais, comme u est très petit devant l'unité, j'ai

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{2}}} = 1 + A_1 u + \ldots + A_m u^m + \ldots \qquad \left[A_m = \frac{1}{2^{2m}} \frac{1.3\ldots(2m-1)}{1.2\ldots m}\right],$$

et la longueur de l'arc depuis la face libre jusqu'au milieu, où la flèche est f, est

$$\int_0^f ds = \int_0^f \frac{ds}{dy}\,dy = \int_0^f \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$= \int_0^f \frac{dy}{\sqrt{2}\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma A_m \int_0^f u^{m-\frac{1}{2}}\,dy.$$

D'ailleurs, cette même longueur est évidemment égale à

$$\frac{1}{2} l\left(1 + \frac{P}{SE}\right).$$

Digitized by Google

En égalant ces deux expressions, on obtient une équation d'où l'on peut tirer la valeur de f.

L'intégration par parties donne une formule de récurrence qui permet de calculer les intégrales. On a, en effet,

$$\int_0^f u^n\,dy = |\,u^n y\,|_0^f - \int_0^f n u^{n-1} y\,du$$

avec

$$-2k^2 y\,dy = du,$$

d'où, comme y s'annule pour $y = 0$ et u pour $y = f$, ce qui fait disparaître le terme tout intégré,

$$\int_0 u^n\,dy = +2nk^2 \int_0^f u^{n-1} y^2\,dy$$

ou

$$\int_0^f u^n\,dy = 2nk^2 \int_0^f u^{n-1}\left(f^2 - \frac{u}{k^2}\right) dy$$

ou

$$(2n+1)\int_0^f u^n\,dy = 2nk^2 f^2 \int_0^f u^{n-1}\,dy.$$

Cette formule de récurrence ramène les intégrations à la suivante :

$$\int_0^f \frac{dy}{\sqrt{u}} = \int_0^f \frac{dy}{k\sqrt{f^2 - y^2}} = \frac{1}{k}\left|\arcsin\frac{y}{f}\right|_0^f = \frac{\pi}{2k}.$$

On obtient, en définitive, après quelques calculs simples,

$$(A)\quad \frac{l}{\pi}\left(1 - \frac{P}{SE}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2^2}kf^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{2^4}k^3 f^4 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{2^6}k^5 f^6 + \ldots$$

Si l'on fait $f = 0$ et qu'on néglige $\frac{P}{ES}$ devant l'unité, on obtient encore

$$k = \frac{\pi}{l},$$

c'est-à-dire la formule d'Euler.

Note. — La formule de récurrence, si je pose $I_n = \int_0^f u^n\,dy$,

Digitized by Google

donne

$$I_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(kf)^2 I_{-\frac{1}{2}} \qquad \left(I_{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2k}\right),$$

$$I_{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}(kf)^4 I_{-\frac{1}{2}},$$

$$I_{\frac{5}{2}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}(kf)^6 I_{-\frac{1}{2}},$$

et

$$I_{\frac{2m-1}{2}} = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 1}{2m(2m-2)\dots 2}(kf)^{2m} I_{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$A_m I_{\frac{2m-1}{2}} = \frac{1}{2^{2m}}\left[\frac{(2m-1)(2m-3)\dots 1}{m(m-1)\dots 1}\right]^2 (kf)^{2m} I_{-\frac{1}{2}}.$$

Il n'y a plus, pour avoir la formule (A), qu'à reporter ces valeurs dans la série en f.

APPLICATION.

Le plus souvent les pylônes employés dans la télégraphie sans fil sont des pylônes haubannés.

Pour étudier leur solidité, il suffit de composer les forces de proche en proche, en prenant les éléments compris entre deux couronnes de haubans.

Il en résulte que des pièces longues se trouvent soumises à des efforts de compression longitudinale. Il faut alors que ces pièces puissent résister au flambage.

C'est dans ces conditions que l'on a à appliquer la formule d'Euler ou les formules qui en dérivent comme celle de Rankine.

Et c'est pour cette raison que nous avons tenu à justifier les formules que l'on trouve dans les formulaires, en présentant la théorie des pièces longues chargées de bout.

M. Pigeaud s'exprime ainsi :

La formule d'Euler est $Q = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$. « Tant que Q demeure au-dessous de cette valeur critique, le phénomène de compression du prisme, même sous l'action des forces désaxées, demeure un phénomène conduisant à un état d'équilibre stable, mais quand Q atteint la valeur critique, la pièce comprimée se trouve dans un état d'équilibre instable et doit flamber.

» Cette valeur critique ne dépend d'ailleurs aucunement de l'écart

Digitized by Google

initial existant entre l'axe de la poutre et la ligne d'action des forces; elle serait la même, si minime que soit l'erreur d'implantation ou bien l'erreur de construction qui aurait rendu l'axe de la pièce un peu courbe; or de telles erreurs sont inévitables en pratique; par suite, si la valeur critique est inferieure à la valeur NS que l'on pourrait se permettre d'atteindre d'après la surface S de la section et la limite d'élasticité N de la matière, il faut considérer cette valeur critique comme fournissant une nouvelle limite à substituer à la limite d'élasticité et déterminer la limite de sécurité en conséquence au quart ou au cinquième de cette nouvelle limite, $\frac{Q}{S} = \frac{\pi^2 EI}{S l^2} = \pi \frac{E r^2}{l^2}$. La limite ainsi obtenue, que nous appellerons la limite d'Euler, ne dépend que du carré du rapport du rayon de giration de la section à la longueur de la pièce. On peut la représenter graphiquement de la manière suivante : si l'on désigne par x le rapport $\frac{r^2}{l^2}$ et par y la limite d'Euler, on a

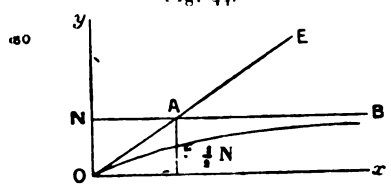
$$y = \pi^2 E x,$$

si bien que la courbe représentative de y est une droite OE partant de l'origine avec un coefficient angulaire $\pi^2 E$. Si l'on trace la droite NA parallèle à Ox et telle que son ordonnée ON égale N, limite d'élasticité, cette droite couperait OE en un point A dont l'abscisse sera telle que

$$N = \pi^2 E x \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{r^2}{l^2} = \frac{N}{\pi^2 E}.$$

» La conclusion qui résulterait de ce que nous venons de dire, c'est que la courbe complète qui représenterait la limite admissible serait

Fig. 44.



constituée par la portion OA de la droite OE et par la partie AB de l'horizontale NAB.

» A certains points de vue, il peut paraître gênant d'avoir à prendre telle ou telle branche de courbe, et c'est là sans doute une des raisons

Digitized by Google

à donner de l'adoption par beaucoup d'ingénieurs d'une formule qui porte en France le nom de Rankine et qu'à l'étranger on appelle aussi formule de Navier.

» Cette formule fournit, pour la limite à substituer à la limite d'élasticité dans les pièces comprimées, l'expression suivante :

$$N' = \frac{N}{1 + \frac{N l^2}{\pi E r^2}}.$$

» Continuons à appeler $\frac{r^2}{l} = x$ et construisons la courbe représentative de N', on a

$$N' = \frac{N}{1 + \frac{N}{\pi^2 E}\frac{1}{x}} = \frac{N x}{x + \frac{N}{\pi^2 E}}.$$

» La courbe représentant N' est donc une hyperbole ayant pour asymptote horizontale la droite

$$y = N,$$

elle passe par l'origine où son coefficient angulaire est $\pi^2 E$ et où, par suite, elle est tangente à la droite OE. C'est donc une courbe de raccordement des deux tronçons utiles de la courbe OAB et qui a le mérite pratique d'être la plus simple de toutes les courbes de raccordement, et de fournir des résultats inférieurs à la limite théorique. C'est une des meilleures justifications qu'on puisse donner. »

Digitized by Google

CHAPITRE XVI.

VIBRATIONS ÉLECTRIQUES DE L'ANTENNE.

Ce Chapitre est consacré à l'étude du courant dans l'antenne à un point de vue spécial.

Je cherche à montrer l'analogie de ce problème avec celui du mouvement d'une corde tendue par des poids.

J'examine donc ce problème de mécanique; je considère ensuite l'énergie cinétique et l'énergie potentielle comme analogues à l'énergie de la self-induction et des capacités.

Je commence par traiter le cas de charges équidistantes. Il suffit de supposer les charges infiniment voisines pour avoir la solution qui convient aux systèmes homogènes.

Je détermine ensuite les périodes de l'antenne en tenant compte de l'inductance placée à sa base.

Les formules étant d'usage fréquent, j'étudie ce qu'elles deviennent dans les différents systèmes d'unités que l'on peut employer.

Enfin, je termine par l'examen de quelques difficultés auxquelles donne lieu l'intégration de l'équation des cordes vibrantes, et notamment des discontinuités qui se propagent d'une extrémité à l'autre.

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES DANS UN FIL D'ANTENNE.

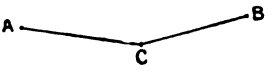
Ce problème est tout à fait analogue à celui des cordes vibrantes, et c'est pour cette raison que, dans les livres de vulgarisation, on essaye de faire concevoir les phénomènes électriques qui se passent dans un fil d'antenne, en représentant, comme étant leur image sensible, ceux qui se produisent dans une corde tendue, dont on écarte les éléments de leur position d'équilibre avec des vitesses données.

Je me propose de préciser ce point de vue et j'envisage le système matériel. Et tout d'abord, y a-t-il lieu de tenir compte des allongements élastiques?

Digitized by Google

Considérons le fil AB tendu entre les points A et B; supposons que ce fil est élastique et écartons-le de sa position de repos naturelle en portant en C, à une petite distance de AB, l'élément matériel qui est

Fig. 45.



en son milieu. Soient l la longueur initiale du fil, l' la longueur AC + CB, φ l'angle infiniment petit de AC avec AB; on aura

$$l' \cos\varphi = l,$$

d'où, en développant et se bornant aux premiers termes,

$$l' - l = \frac{1}{2} l \varphi^2.$$

Ce résultat nous montre que, lorsque le déplacement des éléments est infiniment petit du premier ordre, l'allongement du fil n'est que du second ordre; par suite, les réactions dues à l'élasticité du fil sont négligeables. On peut, par conséquent, considérer, à titre de première approximation, le fil comme inextensible et admettre que la tension dans le fil déformé, tel que ACB, est la même que la tension initiale sous laquelle le fil était tendu de A en B dans son état de repos primitif.

Nous négligerons donc l'allongement élastique du fil et les réactions que cet allongement peut provoquer.

MOUVEMENT DES CORDES VIBRANTES.

J'étudie le mouvement dans un plan vertical.

Soient A_0 et A_{p+1} deux points fixes auxquels sont attachées les extrémités d'un fil sans masse, flexible et inextensible.

En p points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de ce fil sont attachées des masses $m_1, m_2, \ldots, m_p$ qui sont soumises à l'action de la pesanteur.

Je suppose que le fil reste tendu, dans toutes ses parties, de sorte que les distances $A_0A_1 = a_1$, $A_1A_2 = a_2$, $\ldots$, $A_pA_{p+1} = a_{p+1}$ sont des longueurs constantes, et si l'on appelle $(x_i y_i)$ les coordonnées

Digitized by Google

rectangulaires du point A_i, on aura

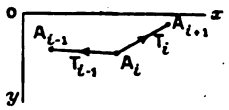
$$\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{a_i}\right)^2 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{a_i}\right)^2 - 1 = 0 \qquad (p \text{ éq.})$$

pour équations de liaisons.

Supposons l'axe des y vertical et dirigé de haut en bas. Si j'appelle T_i la force de tension en kilogrammes du brin $A_i A_{i+1}$ s'exerçant sur la masse m_i, la force de tension du brin $A_{i-1} A_i$ s'exerçant sur cette même masse sera T_{i-1}. Ces quantités T_i et T_{i-1} sont positives si le brin est tendu. Les cosinus directeurs de ces deux tensions appliquées au point matériel m_i sont les suivants :

	Ox	Oy
T_i	$\frac{x_{i+1} - x_i}{a_{i+1}}$	$\frac{y_{i+1} - y_i}{a_{i+1}}$,
T_{i-1}	$-\frac{x_i - x_{i-1}}{a_i}$	$-\frac{y_i - y_{i-1}}{a_i}$,

Fig. 46.



et les équations du mouvement de l'élément m_i sont

$$(2) \qquad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = T_i \dfrac{x_{i+1} - x_i}{a_{i+1}} - T_{i-1} \dfrac{x_i - x_{i-1}}{a_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = T_i \dfrac{y_{i+1} - y_i}{a_{i+1}} - T_{i-1} \dfrac{y_i - y_{i-1}}{a_i} + m_i g. \end{cases}$$

Ces équations sont justement celles que donnerait l'application du principe des vitesses virtuelles, avec l'emploi des multiplicateurs pour l'élimination des vitesses virtuelles par la méthode de Lagrange.

Si je fais $i = p$ dans le système (2), j'ai les équations du mouvement relatives au dernier point matériel, le point A_p de masse m_p, et T_p est la force de tension du dernier brin. Si ce dernier brin passait en A_{p+1} sur une poulie infiniment petite et était tendu par un poids P invariable ($T_p = P$), les équations subsisteraient. Mais la dernière des équations (1) exprimant l'invariabilité de la distance $A_p A_{p+1}$ cesserait de donner une relation utile, elle définirait

Digitized by Google

seulement la grandeur a_{p+1}, qui n'est plus une constante. En revanche, pour remplacer la condition qui vient ainsi à manquer, nous avons une nouvelle condition, c'est que T_p a une valeur donnée P.

Je vais maintenant simplifier le problème en admettant que la valeur de $(P = T_p)$ est très grande. Nous pouvons chercher l'énergie potentielle en étudiant la position de ce poids attaché à l'extrémité de la corde et négliger les variations de hauteur des diverses masses m_i.

Pour faire le calcul de la position du poids T_p, j'admets que les points A_0 et A_{p+1} sont l'un et l'autre sur l'axe des x et j'appelle l la longueur A_0A_{p+1}.

D'une façon générale, la longueur A_iA_{i+1} a pour valeur

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}.$$

Or, je me borne à examiner le cas où les déplacements de la corde dans le sens transversal sont très petits; je puis donc développer cette expression de la distance de deux points successifs suivant les puissances de $\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$ et j'ai ainsi, en me bornant aux premiers termes,

$$a_{i+1} = x_{i+1} - x_i + \frac{1}{2}\frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{x_{i+1}-x_i}, \tag{3}$$

d'où

$$\Sigma a_{i+1} = l + \frac{1}{2}\sum\frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{a_{i+1}}; \tag{4}$$

dans cette expression, Σa_{i+1} est égal à $a_1 + a_2 + \ldots + a_p + a_{p+1}$, où $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des quantités connues données, tandis que a_{p+1} est une variable qui dépend des positions des points; l est la somme des différences successives des abscisses, c'est-à-dire la distance du point d'attache à la petite poulie fixe; enfin, comme $y_{i+1}-y_i$ est considéré comme un infiniment petit, a_{i+1} ne diffère pas sensiblement de $x_{i+1}-x_i$, de sorte que l'on peut, dans un terme du second ordre, remplacer l'une de ces quantités par l'autre.

Mais $\Sigma a_{i+1} - l$ est la longueur de fil dont la corde s'est allongée depuis la position où elle est tendue toute droite de A_0 à A_p jusqu'à sa configuration actuelle; c'est donc la hauteur dont le poids T_p a été relevé; si donc je multiplie cette quantité par T_p, j'aurai l'énergie potentielle du système à une constante près.

Digitized by Google

Cette constante peut d'ailleurs être considérée comme égale à zéro, puisque, si la corde est parfaitement tendue entre A_0 et A_{p+1}, comme le fil est inextensible, le poids T_p ne peut plus produire aucun travail.

Remarquons que l'allongement de la corde est du second ordre, si l'on suppose que les différences $y_{i+1} - y_i$ sont du premier ordre. Par suite, si T_p est grand, de façon que ces différences soient petites, on voit que les déplacements horizontaux de chacun des points de la corde sont des quantités du second ordre qui peuvent être négligées ($x_i =$ const.).

Rappelons que les allongements qui se produiraient si la corde était élastique et fixée à ses extrémités ne seraient que du second ordre également et que, par suite, il n'y a pas lieu ici d'introduire le coefficient d'élasticité de la corde.

Soient donc $\mathfrak{T}$ l'énergie cinétique et W l'énergie potentielle; on aura

$$(5) \qquad 2\mathfrak{T} = \sum_1^p m_i \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2, \qquad 2W = \sum_1^p T_p \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{a_{i+1}},$$

et a_{p+1} peut être considéré comme une constante, sa variation étant infiniment petite du second ordre.

ANALOGIES ÉLECTRIQUES DE CE PROBLÈME.

Considérons une ligne électrique $A_0 A_{p+1}$ et supposons que A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{p-1}A_p$ soient constituées par des bobines de self-induction de coefficients $L_1, L_2, \ldots, L_p$. On supposera qu'entre les points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ et la terre il y a des condensateurs intercalés de capacité $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_p$ les charges des armatures de ces condensateurs reliées aux points $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Appelons i_1 le courant dans A_0A_1, i_2 celui dans $A_1, A_2, \ldots$. Au point A_r, le courant i_r arrivant dans le sens $A_{r-1}A_r$ se bifurque en deux, l'intensité i_{r+1} suit la branche A_rA_{r+1} et la différence $i_r - i_{r+1}$ représente le courant de charge du condensateur A_r dont q_r est la charge. On a donc

$$(6) \qquad i_r - i_{r+1} = \frac{dq_r}{dt}.$$

Digitized by Google

L'énergie cinétique $\mathfrak{T}$ et l'énergie potentielle W sont données par

$$(7) \qquad 2\mathfrak{T} = \sum_1^p L_r i_r^2, \qquad 2W = \sum_1^p \frac{1}{C_r} q_r^2.$$

On voit que les équations du problème électrique et du problème mécanique seront identiques si je prends comme inconnues, au lieu des quantités q_r, les quantités d'électricité Q_r qui ont passé dans une section déterminée de chaque branche $A_{r-1}A_r$ depuis l'époque initiale. On aura, en effet, alors

$$(8) \qquad q_r = Q_r - Q_{r-1},$$

et l'énergie W s'écrira sous la nouvelle forme

$$(9) \qquad 2W = \sum_1^p \frac{1}{C_r}(Q_r - Q_{r-1})^2 \qquad (\text{avec } Q_{p+1} = 0).$$

Il suffira alors, pour faire l'identification, de poser dans (7) :

$$(10) \qquad L_r = m_r \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{C_r} = \frac{T_r}{a_r}.$$

Le coefficient de self-induction est donc représenté par la masse. L'inverse de la capacité est représentée par une grandeur moins facile à définir, une force de tension par unité de longueur. Réciproquement, la capacité équivalente que l'on a à imaginer est proportionnelle à la longueur et en raison inverse de la force de tension. Remarquons que nous distinguons soigneusement les forces de tension exprimables en kilogrammes des tensions proprement dites qui sont exprimables en kg : cm².

SOLUTION ANALYTIQUE.

Je vais simplifier encore le problème en supposant que toutes les masses sont égales et équidistantes.

Soient m la masse, a l'équidistance. On aura donc

$$(1) \qquad (p+1)a = l.$$

Digitized by Google

et je supprime l'indice p de T devenu inutile. On a, d'autre part,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{p} m\left(\frac{dy_r}{dt^2}\right)^2,$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{1}^{p}\frac{T}{a}(y_{i+1}-y_i)^2.$$

J'applique alors les équations de Lagrange à la variable y_r et j'ai

$$(2)\qquad p_r = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \frac{dy_r}{dt}} = m\frac{dy_r}{dt}, \qquad \frac{\partial W}{\partial y_r} = \frac{T}{a}[y_r - y_{r-1} - (y_{r+1}-y_r)],$$

d'où

$$(3)\qquad m\frac{d^2y_r}{dt^2} + \frac{T}{a}(2y_r - y_{r-1} - y_{r+1}) = 0 \qquad \left(\begin{matrix} p \text{ équations; } r = 1, 2, \ldots, p \\ \text{avec } y_0 = 0,\ y_{p+1} = 0 \end{matrix}\right).$$

Je pose, s étant un nombre entier,

$$(4)\qquad w_s = 2\sqrt{\frac{T}{ma}}\times \sin\frac{s\pi}{2(p+1)},$$

et, en désignant par A_s et ε_s des constantes arbitraires,

$$(5)\qquad y_{r-1} = A_s \sin\frac{r-1}{p+1}s\pi\cos(w_s t - \varepsilon_s) \qquad \left(\begin{matrix} p \text{ équations} \\ \text{pour } r-1 = 1, 2, \ldots, p \end{matrix}\right).$$

Je dis que les y ainsi déterminés constituent une solution. Pour la vérifier, il suffit de reporter ces valeurs dans l'équation (3); mais, pour que cette vérification s'étende aux extrémités, il convient de considérer non seulement $y_1, y_2, \ldots, y_p$, mais aussi deux nouvelles quantités y_0 et y_{p+1} qui, d'après la formule (5), sont identiquement nulles, et que nous introduisons en raison de la symétrie pour que la formule (3) soit tout à fait générale et s'applique aussi aux deux segments extrêmes.

On aura donc, de même,

$$(6)\qquad y_{r-2} = A_s \sin\frac{r-2}{p+1}s\pi\cos(w_s t - \varepsilon_s)$$

et

$$(7)\qquad y_r = A_s \sin\frac{r}{p+1}s\pi\cos(w_s t - \varepsilon_s).$$

Je pose, pour abréger,

$$\frac{s\pi}{p+1} = \alpha,$$

Digitized by Google

et j'ai

$$(8)\qquad 2y_{r-1} - y_{r-2} - y_r = A_s \cos(w_s t - \varepsilon_s) \times [2\sin(r-1)\alpha - \sin(r-2)\alpha - \sin r\alpha].$$

Construisons, dans le plan des imaginaires, les vecteurs

$$OM_r = e^{r\alpha\sqrt{-1}}, \qquad OM_{r-1} = e^{(r-1)\alpha\sqrt{-1}}, \qquad OM_{r-2} = e^{(r-2)\alpha\sqrt{-1}},$$

et formons le parallélogramme construit sur OM_r et OM_{r-2} comme côtés; la longueur de la diagonale est évidemment $2\cos\alpha$, et l'on a

$$(9)\qquad e^{(r-2)\alpha\sqrt{-1}} + e^{r\alpha\sqrt{-1}} = 2\cos\alpha . e^{(r-1)\alpha\sqrt{-1}},$$

et, en projetant sur l'axe des quantités imaginaires, il vient

$$(10)\qquad \sin(r-2)\alpha + \sin r\alpha = 2\cos\alpha . \sin(r-1)\alpha,$$

de sorte que (8) devient

$$(11)\qquad 2y_{r-1} - y_{r-2} - y_r = A_s \cos(w_s t - \varepsilon_s)\, 2\sin(r-1)\alpha . (1-\cos\alpha) = 4 A_s \cos(w_s t - \varepsilon_1) \sin^2\frac{\alpha}{2} \times \sin(r-1)\alpha.$$

D'autre part, la formule (5) donne par dérivation

$$(12)\qquad \frac{d^2 y_{r-1}}{dt^2} = -A_s \sin(r-1)\alpha . w_s^2 . \cos(\omega_s t - \varepsilon_s).$$

Reportons les valeurs (11) et (12) dans l'équation courante pour y_{r-1}, il vient

$$(13)\qquad -m A_s \cos(w_s t - \varepsilon_s) . w_s^2 . \sin(r-1)\alpha + \frac{T}{a} A_s \cos(w_s t - \varepsilon_s) . 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sin(r-1)\alpha = 0,$$

ce qui, après suppression des facteurs communs, différents de zéro, laisse l'identité

$$(14)\qquad -m w_s^2 + \frac{T}{a} 4\sin^2\frac{s\pi}{2(p+1)} = 0;$$

c'est, en effet, d'après (4), la définition de w_s.

Donc les expressions (5) des variables y satisfont bien aux équations différentielles du problème. C'est une solution particulière dépendant des constantes arbitraires A_s, ε_s.

Il est facile de passer de ce cas à celui où les masses sont uniformément réparties.

Digitized by Google

Soit σ la densité de la corde équivalente, j'aurai

$$(p+1)m = \sigma l. \tag{15}$$

Et je ferai

$$(r-1)a = x. \tag{16}$$

Je ferai tendre $p+1$ vers l'infini, de même que r, en même temps que a tendra vers zéro.

J'aurai alors

$$y_x = A_s \sin \frac{x}{l} s\pi \times \cos(w_s t - \varepsilon_s); \tag{17}$$

la fréquence n_s, la période T_s, la pulsation w_s sont données par l'équation

$$n_s = \frac{1}{T_s} = \frac{w_s}{2\pi} = 2\sqrt{\frac{T}{ma}} \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{\sin \dfrac{s\pi}{2(p+1)}}{\dfrac{1}{p+1}} \times \frac{1}{p+1}. \tag{18}$$

Or on a, d'après (15) et (1),

$$ma = \sigma \times \left(\frac{l}{p+1}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad (p+1)\sqrt{ma} = l\sqrt{\sigma},$$

d'où, pour p infini,

$$n_s = 2\sqrt{T} \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{s\pi}{2} \times \frac{1}{l\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\sigma}} \times \frac{s}{l}. \tag{19}$$

Revenons au cas des masses équidistantes.

La solution la plus générale sera

$$y_r = \sum_{s=1}^{s=p} A_s \sin \frac{(r-1)s\pi}{p+1} \times \cos(w_s t - \varepsilon_s), \tag{20}$$

où les constantes A_s, ε_s seront à déterminer par les conditions initiales.

La télégraphie sans fil a posé en électricité des problèmes dans lesquels on peut négliger la résistance métallique, parce que le mouvement de l'électricité se fait à la surface des conducteurs sans pénétrer dans leur masse. C'est ainsi qu'une antenne formée d'un fil tendu au-dessus du sol vibre électriquement comme une corde vibrante. L'équation (19) donne les périodes des harmoniques.

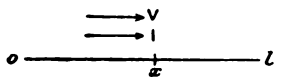
Digitized by Google

DÉTERMINATION DE LA FRÉQUENCE PROPRE D'UNE ANTENNE.

Soient L et C l'inductance et la capacité de l'antenne par unité de longueur. Supposons la résistance négligeable.

Soient x la distance d'une tranche considérée à la base de l'an-

Fig. 47.



tenne, V et I le potentiel et l'intensité du courant en x; nous avons les équations

$$(1) \qquad L\frac{dI}{dt} = -\frac{dV}{dx},$$

$$(2) \qquad C\frac{dV}{dt} = -\frac{dI}{dx}.$$

La première exprime que la différence de potentiel aux deux extrémités du tronçon dx est due à la force électromotrice d'induction.

La seconde exprime que la différence entre les quantités d'électricité qui entrent dans l'élément dx par une de ses bases et qui sortent par l'autre, ont servi à augmenter la charge de la surface latérale.

De là on tire, en dérivant (2) par rapport à t et tenant compte de (1),

$$CL\frac{d^2V}{dt^2} = -\frac{d}{dx}\left(L\frac{dI}{dt}\right) = +\frac{d^2V}{dx^2},$$

ou, en posant $CL = \frac{1}{a^2}$,

$$(3) \qquad \frac{d^2V}{dt^2} = a^2\frac{d^2V}{dx^2},$$

équation identique à l'équation des cordes vibrantes.

Soient :

L_0 l'inductance de la bobine de self-induction qui est à la base de l'antenne;

l la longueur de l'antenne.

Pour $x = l$, nous devons avoir $I = 0$, aucun courant ni de conduction ni de charge n'existant à la pointe de l'antenne.

Digitized by Google

Pour $x = 0$, la différence de potentiel avec la terre est due à la force électromotrice engendrée dans la bobine de self-induction par la variation du courant. On a donc

$$V = -L_0 \frac{dI}{dt}. \tag{4}$$

Si le courant croît, la force électromotrice de self-induction tend à produire un courant dirigé en sens contraire du courant croissant, d'après la loi de Lenz; or, nous comptons les potentiels et les intensités positivement dans le même sens. Il faut donc bien le signe — devant L_0.

Cherchons une solution isochrone.

Soit $f = \frac{p}{2\pi}$ la fréquence; nous aurons pour solution, sous la condition $p = \pm \frac{q}{\sqrt{CL}}$,

$$(A) \quad \begin{cases} I = (A_1 \cos pt + A_2 \sin pt)(B_1 \cos qx + B_2 \sin qx), \\ V = \sqrt{\frac{L}{C}}(A_1 \sin pt - A_2 \cos pt)(B_1 \sin qx - B_2 \cos qx), \end{cases}$$

et les conditions aux limites donnent

$$(B) \quad \begin{cases} B_2 \cos ql + B_2 \sin ql = 0, \\ B_2 \sqrt{\frac{L}{C}} - B_1 p L_0 = 0; \end{cases}$$

d'où, par élimination de $(B_1 : B_2)$,

$$\frac{\cot ql}{ql} = \frac{L_0}{(Ll)} \tag{5}$$

et

$$f = \frac{ql}{2\pi\sqrt{(Cl) \times (Ll)}}, \tag{6}$$

Cl et Ll étant la capacité et l'inductance totales d'antenne.

L'équation (5) est une équation transcendante qui a une infinité de racines, à chacune desquelles l'équation (6) fait correspondre une fréquence particulière.

On commettrait donc une erreur en ajoutant en bloc à l'inductance Ll de l'antenne l'inductance L_0 de la bobine de self-induction

Digitized by Google

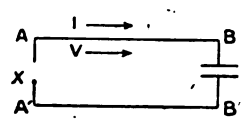
et posant simplement

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{C\,l(L\,l + L_0)}}.$$

PROPAGATION DU COURANT LE LONG D'UN CIRCUIT FERMÉ PAR UNE CAPACITÉ.

Supposons encore que l'éclateur X soit relié par la ligne double AB, A'B' à un condensateur C_0.

Fig. 48.



Les équations (1) et (2) du problème précédent subsisteront toujours, V désignant la différence de potentiel des deux brins.

Les conditions aux limites seront modifiées. Pendant que l'étincelle réunit AA', on y a

$$V = 0 \qquad \text{pour} \qquad x = 0.$$

D'autre part, à l'extrémité BB', le courant I est le courant de charge; on a donc

$$I = C_0 \frac{dV}{dt} \qquad \text{pour} \qquad x = l.$$

Partons encore des formules

$$I = (A_1 \cos pt + A_2 \sin pt)(B_1 \cos qx + B_2 \sin qx),$$

$$V = \sqrt{\frac{L}{C}}(A_1 \sin pt - A_2 \cos pt)(B_1 \sin qx - B_2 \cos qx).$$

On aura

$$B_2 = 0,$$

$$B_1 \cos ql = C_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \times p . B_1 \sin ql,$$

d'où

$$\frac{\cot ql}{ql} = \frac{C_0}{(C\,l)}.$$

Si l'on appelle λ la longueur d'onde, on peut écrire

$$q = \frac{2\pi}{\lambda},$$

Digitized by Google

et la relation précédente pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{2\pi l}{\lambda}\operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{\lambda}.l\right)=\frac{(C\,l)}{C_0}.$$

ISOLEMENT DE L'ANTENNE.

Il faut suspendre l'extrémité du fil d'antenne au moyen d'isolateurs. Mais les tensions vont en croissant de la base de l'antenne jusqu'à son extrémité libre. C'est donc une grosse difficulté que d'avoir un isolement compatible avec des quantités d'énergie suffisantes pour des transmissions à grande distance.

Nous avions [éq. (A) et (B)]

$$(A)\qquad V=\sqrt{\frac{L}{C}}(A_1\sin pt-A_2\cos pt)(B_1\sin qx-B_2\cos qx),$$

$$(B)\qquad B_1\cos ql+B_2\sin ql=0,\qquad B_2\sqrt{\frac{L}{C}}+B_1pL_0=0,$$

et nous voulons savoir quelle est la différence de potentiel due à la propagation le long de l'antenne.

Pour $x=0$, on a $V=V_0$, savoir

$$V_0=-B_2\sqrt{\frac{L}{C}}(A_1\sin pt-A_2\cos pt).$$

Pour $x=l$, posons $V=V_1$; on a

$$V_1=\sqrt{\frac{L}{C}}(A_1\sin pt-A_2\cos pt)(B_1\sin ql-B_2\cos ql).$$

On en déduit

$$\frac{V_1}{V_0}=\frac{B_1\sin ql-B_2\cos ql}{-B_1},$$

où, en vertu de la première équation (B),

$$\frac{V_1}{V_0}=\frac{1}{\cos ql}=\frac{1}{\cos\frac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Si la longueur d'onde est beaucoup plus grande que la longueur de l'antenne, il n'y aura pas grande différence entre V_1 et V_0.

On compte souvent

$$\lambda=5l.$$

L_0 serait alors cent fois la self propre de l'antenne.

Digitized by Google

CALCUL DU PRODUIT $\sqrt{CL}$. EMPLOI DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES D'UNITÉS.

1. En principe, le produit $\sqrt{CL}$, dans les formules que nous donnons, doit être calculé en évaluant C et L en unités C. G. S. et en introduisant une nouvelle unité électrique qui peut être le pouvoir inducteur spécifique ε du milieu diélectrique constitué par l'air. Mais dans le système C. G. S. électromagnétique, on utilise la relation de Maxwell $\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{1}{v}$, pour ramener les unités à un moindre nombre. On fait, dans l'air, $\mu = 1$, et l'on a $\sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{v}$; le pouvoir inducteur électrique de l'air étant numériquement égal à l'inverse du carré de la lumière dans l'air (ou le vide),

$$\varepsilon = (3.10^{10})^{-2} \qquad (\text{sec}^2 : \text{cm}^2).$$

2. Seulement, dans le système dit *pratique*, on a compliqué les choses. Négligeant le point de vue des mécaniciens, on a pris froidement pour unité de longueur le quadrant et pour unité de masse la masse de 10^{-11} gramme.

Le quart du méridien terrestre fait 10 millions de mètres. Le quadrant vaut donc 10^7 m ou 10^9 cm.

C'est en quadrants ou Henrys qu'on mesure les coefficients de self-induction en unités pratiques.

La valeur numérique d'un coefficient de self-induction en unités pratiques est donc 10^9 fois plus petite que sa valeur en C. G. S.

$$L_{pr} = 10^{-9} L_{CGS}.$$

D'autre part, la capacité a pour formule de dimensions

$$[C] = [\varepsilon][L],$$

ε étant l'unité de pouvoir inducteur électrique, L étant l'unité de longueur.

Mais $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ayant pour dimensions cm : sec sera exprimé, dans le système pratique, par un nombre 10^9 fois plus petit et ε par un nombre 10^{+18} plus grand; donc la capacité C par un nombre 10^{+9} fois plus grand que dans le système C.G.S. C'est-à-dire que sa valeur en unités pratiques sera

$$C_{pr} = 10^9 C_{CGS}.$$

Digitized by Google

Donc dans la formule

$$T = 2\pi\sqrt{CL},$$

on peut exprimer C et L tous deux soit en unités C. G. S. électromagnétiques, soit en unités pratiques, soit en C. G. S. ; et, en effet, T étant exprimé en secondes ne doit pas changer de valeur, la seconde étant conservée dans tous les systèmes.

3. On peut remarquer encore que si C est mesuré en cm, c'est-à-dire en C. G. S. électrostatiques, il faut, pour avoir C en unités électromagnétiques C. G. S., tenir compte de la formule de dimensions

$$[C] = [\varepsilon][L] = [L^{-2}T^2][L],$$

de sorte que C devrait être divisé par le carré de la vitesse de la lumière. Si donc, dans la formule (C. G. S.)

$$T = 2\pi\sqrt{CL},$$

on exprime L et C en centimètres, T se trouvera multiplié par la vitesse de la lumière v; or, vT est la longueur d'onde; on écrira donc, en appelant λ la longueur d'onde et mettant en indice le nom de l'unité

$$\lambda_{cm} = 2\pi\sqrt{C_{cm}\,L_{cm}}.$$

Dans cette formule, C est mesuré en unités électrostatiques, L en unités électromagnétiques.

4. Supposons maintenant que les capacités soient mesurées en microfarads. Comme, pour l'air, on a

$$\varepsilon = \frac{1}{9.10^{20}}\ \text{sec}^2 : \text{cm}^2,$$

il vient

$$C = 9.10^{20}\,C_{cm},$$

C étant mesuré en unités électromagnétiques.

Or nous avons vu que l'unité pratique de capacité vaut 10^{-9} unités électromagnétiques. Cette unité est le Farad; j'aurai donc pour la mesure C_F d'une capacité donnée en Farads,

$$C_F = 9.10^{11}\,C_{cm}.$$

Et, comme le microfarad est le millionième du Farad, on a, pour le

Digitized by Google

même nombre de microfarads :

$$C_{\mu F} = 9.10^{11} C_{cm},$$

formule d'usage courant.

5. Autres exemples de transformation d'unités. Dans les mesures de distance explosive et d'isolement, on a besoin d'avoir le volt en unités électrostatiques C. G. S.

On peut suivre la marche ci-après.

Soient, en fonction d'une unité arbitraire : Q_M la valeur de l'unité de quantité électromagnétique, Q_S la valeur de l'unité de quantité électrostatique, et soit q une certaine quantité d'électricité; sa valeur numérique sera $\frac{q}{Q_M}$ dans le système électromagnétique, et $\frac{q}{Q_S}$ dans le système électrostatique. Écrivons la loi de Coulomb dans les deux systèmes, on aura

$$f = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\left(\frac{q}{Q_M}\right)^2}{r^2}, \qquad f = \frac{\left(\frac{q}{Q_S}\right)^2}{r^2}$$

pour la force f déterminée dans l'air par l'action de deux masses égales à q à la distance r. On déduit de là

$$Q_S = Q_M \sqrt{\varepsilon} \qquad \text{ou} \qquad Q_M = 3.10^{10}.Q_S,$$

puisque la valeur $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 3.10^{10}$ caractérise le système électromagnétique C. G. S.

D'autre part, on a, pour le potentiel, la formule de dimensions suivante dans le système électromagnétique

$$V = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}.$$

Cette formule résulte :

1° De la formule de Coulomb, qui donne

$$Q = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}};$$

2° De la formule de définition du potentiel

$$V = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q_1}{r}.$$

Digitized by Google

Admettons-la. Si nous voulons avoir la valeur du volt unité pratique, il suffit, dans la formule de dimensions, de faire

$$M = 10^{-11}, \qquad L = 10^{9}, \qquad T = 1,$$

il vient

$$V = 10^{8},$$

ce qui signifie que le volt vaut 10^8 fois l'unité électromagnétique de force électromotrice.

D'autre part, l'énergie électrique donne la formule

$$W = \frac{1}{2} QV.$$

Si donc $Q_M V_M$, $Q_S V_S$ sont les unités de quantité et de potentiel dans les deux systèmes, électromagnétique et électrostatique, on a les formules de dimension

$$V_M = [W] : Q_M, \qquad V_S = [W] : Q_S,$$

car W dépendant des unités cm, masse du gr., sec, qui sont les mêmes dans les deux systèmes C. G. S., électromagnétique et électrostatique, son unité [W] a la même valeur dans les deux systèmes.

On a donc

$$V_S = \frac{Q_M}{Q_S} V_M = 3.10^{10} V_M = 300 (10^8 V_M) = 300 \text{ volts}.$$

L'unité électrostatique du potentiel vaut donc 300 volts.

6. A titre de simple remarque destinée à soulager la mémoire, je ferai observer que, plutôt que de faire appel à la relation singulière

$$M = 10^{-11} \quad \text{(masse du gramme)},$$

qui définit le système électromagnétique pratique, il vaut mieux (comme, d'autre part, on sait que le Henry ou L vaut 10^9 ou un quadrant en cm) se rappeler simplement que l'ampère est le dixième de l'unité (C. G. S.) électromagnétique, ou que le Coulomb est de même, puisque la seconde est conservée, le dixième de l'unité (C. G. S.) électromagnétique de quantité. C'est ce qui résulte de la formule

$$Q = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}},$$

où l'on fait, pour passer au système pratique, $M = 10^{-11}$, $L = 10^9$; il

Digitized by Google

vient

$$Q = 10^{-1}$$

ou

$$1 \text{ coulomb} \equiv \tfrac{1}{10} \text{ d'unité (C. G. S.) électromagnétique.}$$

7. Il faut distinguer les systèmes et les choix d'unités. Dans les systèmes C. G. S. électrostatique et électromagnétique, les unités fondamentales : centimètre, masse du gramme, seconde sont les mêmes, mais les équations de définition des grandeurs diffèrent. Dans le système électromagnétique et dans le système pratique, les équations de définition sont les mêmes, mais les unités fondamentales de masse et de longueur diffèrent.

Dans le système absolu que nous avons employé, les unités de définition diffèrent par le nombre; en outre des unités fondamentales de longueur, de masse et de temps, nous avons implicitement admis qu'il y avait encore une autre unité fondamentale, de nature électrique, pour laquelle on peut prendre l'unité de pouvoir inducteur électrique du vide.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DES CORDES VIBRANTES.

Revenons à l'équation (3) de la page 304.

Soient

$$\text{(I)} \quad \text{Conditions initiales} \begin{cases} V = f(x) \\ \dfrac{dV}{dt} = f_1(x) \end{cases} \text{ pour } t = 0 \quad \text{et} \quad 0 < x < l$$

et

$$\text{(II)} \quad \text{Conditions aux limites} \begin{cases} V = 0 & \text{pour} \quad x = 0, \\ V = 0 & \text{pour} \quad x = l. \end{cases}$$

La solution est, comme on sait,

$$\text{(7)} \qquad V = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$$

avec

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x f_1(x)\, dx,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x f_1(x)\, dx.$$

Ces fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont ainsi déterminées pour $0 < x < l$.

Digitized by Google

D'autre part, les équations aux limites donnent

$$(8)\qquad \begin{cases} \varphi(at) + \psi(-at) = 0, \\ \varphi(l+at) + \psi(l-at) = 0, \end{cases}$$

ou, en changeant at en x,

$$(9)\qquad \varphi(x) + \psi(-x) = 0,$$

$$(10)\qquad \varphi(x+l) + \psi(l-x) = 0.$$

L'équation (10) donne la valeur de φ pour les valeurs de l'argument comprises entre l et $2l$. En y changeant x en $-x$, elle donne les valeurs de ψ dans le même intervalle. Enfin, en y changeant l en $l+x$, il vient

$$\varphi(2l+x) + \psi(-x) = 0,$$

et, d'après (9),

$$\varphi(2l+x) - \varphi(x) = 0.$$

Donc φ admet la période $2l$ et, d'après (9), il en est de même pour ψ. En résumé, φ et ψ ayant la période $2l$ et étant connues entre 0 et $2l$, sont déterminées pour toutes les valeurs de l'argument, ce qui achève la détermination de V [éq. (7)].

Signalons une difficulté. Le système électrique est évidemment équivalent au système mécanique constitué par la corde vibrante; l'observation suivante s'applique donc non seulement au problème des cordes vibrantes, mais encore à celui du courant dans l'antenne.

Le mouvement d'un système est parfaitement connu quand on donne à l'époque initiale la position de ses différents points matériels et leurs vitesses. Or, les conditions initiales (I) donnent V et $\frac{dV}{dt}$. Il y a par suite impossibilité de satisfaire en même temps aux conditions aux limites (II), à moins que celles-ci ne soient choisies de façon à coïncider avec le mouvement naturel.

Donc chaque point de la corde émettant par sa vibration une onde qui se propage, au moment où cette onde arrive à l'une des extrémités, la condition aux limites lui imposera une liaison nouvelle, d'où résultera un choc. Cette impulsion détermine une discontinuité du second ordre qui, à son tour, va se propager.

D'après l'équation (7), tant que les arguments $x+at$, $x-at$ sont compris entre 0 et l, les valeurs de φ et de ψ sont entièrement déterminées par les conditions initiales (I), et par suite $\frac{d^2V}{dt^2}$ a, d'après

Digitized by Google

l'équation (7), une valeur déterminée par ces conditions initiales, quelles que soient les conditions aux limites imposées. Mais dès que, t croissant, $x + at$, par exemple, atteint la valeur l, il se produira une discontinuité. Pour $x = 0$, par exemple, l'onde rétrograde arrivant de l'extrémité à l'origine, au bout du temps $\frac{l}{a}$, devra subir une modification instantanée pour que la valeur de $a^2 \frac{d^2 V}{dx^2}$ y devienne immédiatement égale à la valeur de $\frac{d^2 V}{dt^2}$ qui y est imposée par les conditions aux limites.

Il en résulte que l'étude de la propagation des discontinuités du second ordre se présente d'elle-même à notre attention.

Considérons une ligne homogène de longueur l. Soit V le potentiel à la distance x de l'origine. Au point O, une force électromotrice appliquée maintient le potentiel à la valeur $\gamma_0(t)$, tandis qu'à l'autre extrémité O', où l'on a $x = l$, une autre force électromotrice appliquée maintient le potentiel à la valeur donnée $\gamma_1(t)$.

Je pose

$$x + at = u, \qquad x - at = v$$

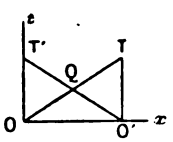
et j'ai

$$V = \varphi(u) + \psi(v),$$

les valeurs de $\varphi(u)$ et de $\psi(v)$ étant connues par les conditions initiales pour toutes les valeurs de u et de v, telles que l'on ait

$$0 < u < l, \qquad 0 < v < l.$$

Fig. 19.



Sur les deux axes rectangulaires Ox, Ot, je porte respectivement les distances et les temps. Soit, sur Ox, $OO' = l$. Soit de plus

OT la droite $x - at = 0$,
O'T' la droite $x + at = l$.

Soit Q le point d'intersection de ces deux droites.

Soit $M(x,t)$ un point du triangle OO'Q; il est situé entre les

Digitized by Google

droites

$$x + at = 0, \qquad x + at = l,$$

d'où

$$0 < x + at < l,$$

et aussi entre les droites

$$x - at = 0, \qquad x - at = l,$$

d'où

$$0 < x - at < l.$$

En ce point $M(x, t)$, les valeurs de $\varphi(u)$ et de $\psi(v)$ sont connues par les conditions initiales et l'on a

$$\frac{d^2V}{dt^2} = a^2\varphi''(u) + a^2\psi''(v),$$

les dérivées étant prises respectivement par rapport à u et à v.

Soit maintenant $M'(x', t')$ un autre point, qui soit intérieur au triangle OQT'. Ce point est situé entre les droites

$$x - at = 0, \qquad x - at = -l;$$

on a donc

$$-l < x' - at' < 0.$$

Pour avoir la valeur de $\psi(v)$ en M', il faut recourir aux conditions aux limites. Or, celles-ci disent que, pour $x = 0$, on a

$$\varphi(at) + \psi(-at) = \chi_0(t),$$

ou, d'une façon générale,

$$\varphi(-v') + \psi(v') = \chi_0\left(-\frac{v'}{a}\right) = \chi_0\left(t' - \frac{x'}{a}\right),$$

d'où

$$V = \varphi(u') - \varphi(-v') + \chi_0\left(t' - \frac{x'}{a}\right) \qquad (0 < v' < -l).$$

On en déduit

$$\frac{d^2V}{dt^2} = a^2\varphi''(u') - a^2\varphi''(-v') + \chi_0''\left(t' - \frac{x'}{a}\right).$$

Supposons que les points M et M' s'approchent d'un même point de OQ; on aura les valeurs limites

$$\frac{d^2V}{dt^2} = a^2\varphi''(u) + a^2\psi''(0),$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = a^2\varphi''(u) - a^2\varphi''(0) + \chi''(0),$$

Digitized by Google

et il y aura entre ces deux valeurs une différence

$$a^2\varphi''(0) + a^2\psi''(0) - \chi_0''(0),$$

qui est une discontinuité du second ordre. Elle sera nulle si l'on a

$$a^2\varphi''(0) + a^2\psi''(0) = \chi_0''(0)$$

ou

$$a^2\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{dt^2}$$

au point limite MM'.

Ce ne sera pas le cas, en général, parce que φ et ψ ne dépendent que de la distribution initiale des potentiels, tandis que χ_0 ne dépend que de la force électromotrice appliquée.

Il y aura donc une discontinuité du second ordre sur la ligne OQ, c'est-à-dire pour les points

$$x - at = 0.$$

Si je fixe mon attention, non sur les points de la ligne, mais sur les positions de ces points atteintes par la discontinuité, j'aurai

$$\delta x - a\,\delta t = 0,$$

de sorte que cette position se déplace avec la vitesse constante

$$\frac{\delta x}{\delta t} = a,$$

qui est celle de la propagation de la discontinuité ou de son déplacement progressif. Ces deux notions sont ici confondues, le milieu étant immobile, de sorte que la vitesse par rapport au milieu et la vitesse vraie se confondent.

Digitized by Google

CHAPITRE XVII.

RÉSONANCE PRIMAIRE. ALTERNATEUR A RÉSONANCE.

Dans un poste radioélectrique à étincelles, on a soin de souffler énergiquement l'étincelle ; on évite ainsi la formation d'un arc. Sans cette précaution, la différence de potentiel entre les deux armatures du condensateur ne pourrait pas s'élever ; il n'emmagasinerait donc qu'une quantité d'énergie assez faible et l'étincelle manquerait de puissance.

D'autre part, pour réaliser la plus grande différence de potentiel entre les armatures, on règle le circuit à résonance.

C'est-à-dire qu'on fait en sorte, en agissant soit sur la vitesse, soit sur l'inductance du circuit, d'égaler la période de la force électromotrice à celle du circuit oscillant, supposé dénué de résistance ohmique.

Dans ces conditions, l'intensité du courant et la force électromotrice sont en phase, et comme l'impédance est minimum, l'intensité et la différence de potentiel aux armatures du condensateur sont toutes deux maximum.

En général, on interpose un transformateur. J'indique ce que devient alors la condition de résonance.

Je fais ensuite la théorie élémentaire du transformateur et celle de l'alternateur à résonance de M. Béthenod. J'indique les précautions à prendre dans l'emploi du wattmètre.

Quand on en est à la résonance, la différence de potentiel du condensateur peut être beaucoup plus élevée, mettons dix fois, que le voltage à circuit ouvert. Il faut un transformateur bien isolé.

Le temps de charge jusqu'à l'éclatement de l'étincelle est très bien défini, parce que le voltage aux bornes de l'éclateur a des oscillations d'amplitude nettement croissantes.

Digitized by Google

THÉORIE DE LA RÉSONANCE PRIMAIRE.

En pratique, lorsque le radiotélégraphiste opère la charge du condensateur sous une force électromotrice alternative, c'est toujours par l'intermédiaire d'un transformateur.

Nous avons donc deux circuits à considérer : le primaire, qui contient la force électromotrice $e = \sqrt{2}\, e_{\text{eff}} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right)$, et le secondaire qui contient le condensateur de capacité c.

Bien que, pour simplifier le problème, on traite en général la charge du condensateur en faisant abstraction du transformateur, il importe de remarquer que l'assimilation des deux cas n'est pas légitime, pendant la période variable qui précède le régime permanent périodique, parce que le système constitué par le circuit primaire et par le circuit secondaire a trois degrés de liberté, tandis que le circuit de charge du condensateur n'en a que deux. Il y a, en effet, forcément une inductance dans le circuit primaire, ne fût-ce que la self-inductance de fuite du transformateur. Comme on peut la supposer parcourue à l'époque $t = 0$ par un courant arbitraire, on a un nouveau degré de liberté dont il convient de tenir compte.

Soit v la différence de potentiel des armatures A et B du condensateur, $q_2 = Cv$ la charge de l'armature A, $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$ le courant de charge dont la direction positive est dirigée de B vers A en suivant le circuit métallique.

Soit i_1 le courant primaire ; je prends comme direction positive celle qui dans l'enroulement primaire du transformateur est dans le même sens que le sens positif de l'enroulement secondaire.

Enfin je suppose que la force électromotrice est comptée positivement dans le même sens que le courant i_1.

Conformément aux idées de Maxwell, nous admettons qu'on peut appliquer au système les équations générales de la mécanique.

L'énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 ;$$

d'après les conventions faites, le coefficient M sera positif. Les coef-

Digitized by Google

ficients L_1, M, L_2 sont des constantes, indépendantes des variables q_1 et q_2 qui définissent la position ou l'état du système.

q_2 est la charge du condensateur;

q_1 est la quantité totale d'électricité qui, depuis l'époque $t = 0$, a traversé une section droite du conducteur primaire. L'électricité se comportant comme un fluide incompressible, cela définit l'état du circuit.

Les forces d'inertie seront

$$-\left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}\right), \qquad -\left(M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}\right),$$

et l'on aura

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0.$$

D'autre part, l'énergie potentielle est

$$\frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C}.$$

Sa variation est

$$\frac{1}{C} q_2 \, dq_2,$$

de sorte que

$$e = \frac{1}{C} q_2$$

est une force généralisée, agissant comme la force élastique d'un ressort, en sens opposé à i_2.

Il y a enfin perte d'énergie sous forme d'énergie calorifique

$$R_1 i_1^2 \, dt \quad \text{ou} \quad R_1 i_1 \, dq_1.$$

Il en résulte que $R_1 i_1$ peut être considéré comme une force généralisée correspondant à la variable q_1. C'est une force de viscosité. On aurait de même la force $R_2 i_2$ dans le circuit secondaire.

Les équations du mouvement sont donc

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} - R_1 i_1 + \sqrt{2}\, e_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi) = 0, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$-M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - \frac{1}{C} q_2 = 0.$$

Remplaçons $\frac{d}{dt}$ par le symbole opératoire équivalent $\mathfrak{D}$, et éliminons i_1 en opérant sur la seconde équation par $(L_1 \mathfrak{D} + R_1)$ et

Digitized by Google

nous obtenons

$$[-M^2\mathfrak{D}^2+(R_1+L_1\mathfrak{D})(R_2+L_2\mathfrak{D})]i_2+(R_1+L_1\mathfrak{D})\frac{q_2}{C}$$
$$=-M\sqrt{2}\,e_{\text{eff}}\mathfrak{D}\sin(\omega t+\varphi).$$

Les coefficients de l'équation caractéristique sont tous positifs, cela est évident pour les termes de degré zéro, un et deux ; et quant au terme en $\mathfrak{D}^3$, il est multiplié par

$$L_1L_2-M^2;$$

or la condition pour que l'énergie cinétique soit une fonction toujours positive, c'est que cette quantité soit positive ; elle ne peut donc être négative.

Il est, dès lors, évident au point de vue algébrique, que si l'équation caractéristique, qui est ici du troisième degré, à coefficients tous positifs, a une racine réelle, cette racine ne peut être que négative.

Je dis que, dans tout couple de racines imaginaires conjuguées, $\alpha\pm\gamma\sqrt{-1}$, la partie réelle α est négative.

En effet, si nous faisons appel au principe de la conservation de l'énergie, nous pouvons écrire

$$d\left(\frac{1}{2}L_1i_1^2+Mi_1i_2+\frac{1}{2}L_2i_2^2+\frac{1}{2}\frac{1}{C}q_2^2\right)=-R_1i_1^2\,dt-R_2i_2^2\,dt.$$

On obtiendrait cette relation en multipliant la première équation par $dQ_1=i_1\,dt$, la seconde par $i_2\,dt$ et ajoutant.

Dans ces calculs, relatifs à une recherche concernant l'équation caractéristique, nous faisons abstraction de la force électromotrice agissante ; autrement dit nous faisons $e=0$.

Nous pouvons choisir les conditions initiales de façon à avoir pour solution

$$q_2=e^{\alpha t}\sin\gamma t.$$

Alors i_1 et i_2 seront de la forme

$$e^{\alpha t}(M\cos\gamma t+N\sin\gamma t).$$

Donc l'énergie totale W sera de la forme

$$W=e^{2\alpha t}A,$$

A étant une fonction homogène du second degré en $\cos\gamma t$ et $\sin\gamma t$.

Digitized by Google

Cette fonction A est toujours positive comme W; comme elle est périodique, elle ne peut tendre vers zéro quand t augmente indéfiniment; mais si α est positif, $\frac{\alpha}{3}$W, en raison du facteur exponentiel, croîtra indéfiniment. C'est impossible puisque dW est essentiellement négatif, cette variation se retrouvant sous forme de chaleur de Joule. Si donc W est toujours et constamment décroissant, W ne peut croître indéfiniment. Donc α est négatif ou nul. Il ne pourrait être que négatif si R_1 et R_2 sont différents de zéro, car W ne peut être une fonction périodique si sa dérivée par rapport au temps est constamment négative.

Nous voyons donc que la solution générale de l'équation sans second membre tend vers zéro avec le temps. Or la solution générale de l'équation avec second membre se compose d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Si la solution particulière est la solution isochrone, elle sera indépendante des constantes arbitraires et seule la solution de l'équation sans second membre contiendra sous forme linéaire les constantes qui déterminent les circonstances initiales du mouvement. Par suite, la solution isochrone est la solution asymptotique, représentant le régime permanent stable qui finit par s'établir, après la période troublée qui dépend des circonstances initiales ou accidentelles.

Cherchons donc la solution isochrone.

Nous appliquerons ici le principe de superposition. Si $(i'_1 i'_2)$ représentent une solution; si $(i''_1 i''_2)$ en représentent une autre,

$$i_1 = i'_1 + i''_1, \qquad i_2 = i'_2 + i''_2$$

représentera aussi une solution. Cela résulte du caractère de l'équation, d'être linéaire, à coefficients constants.

Comme, d'autre part, les coefficients sont réels, si $(i'_1 i'_2)$ correspondent à l'application d'une force électromotrice réelle, tandis que $(i''_1 i''_2)$ correspondent à l'application d'une force électromotrice purement imaginaire, on aura $(i'_1 i'_2)$ en prenant la partie réelle de la solution $(i_1 i_2)$ correspondant à la force électromotrice complexe et $(i''_1 i''_2)$ en prenant la partie purement imaginaire de ladite solution.

Je poserai donc

$$e = \mathrm{U}\, e^{\omega t \sqrt{-1}},$$
$$i_1 = \mathrm{I}_1\, e^{\omega t \sqrt{-1}},$$
$$i_2 = \mathrm{I}_2\, e^{\omega t \sqrt{-1}},$$

Digitized by Google

les quantités U, I_1, I_2 étant des quantités complexes ou vectorielles. J'aurai d'ailleurs

$$\mathfrak{D}e = \omega\sqrt{-1}\,e, \qquad \mathfrak{D}i_1 = \omega\sqrt{-1}\,i_1, \qquad \mathfrak{D}i_2 = \omega\sqrt{-1}\,i_2$$

et

$$i_2 = C\mathfrak{D}e = C\omega\sqrt{-1}\,e,$$

d'où

$$q_2 = \frac{1}{C\omega\sqrt{-1}}\,i_2.$$

Enfin un symbole, tel que

$$R_1 + L_1\mathfrak{D},$$

devra être remplacé par l'opérateur équivalent

$$R_1 + L_1\omega\sqrt{-1}.$$

Dans ces conditions, après division par $e^{\omega t\sqrt{-1}}$, les équations du mouvement deviennent

$$(R_1 + L_1\omega\sqrt{-1})\,I_1 + M\omega\sqrt{-1}\,I_2 = U,$$
$$M\omega\sqrt{-1}\,I_1 + \left[R_2 + \left(L_2 - \frac{1}{C\omega^2}\right)\omega\sqrt{-1}\right]I_2 = 0.$$

Ces équations sont de la forme

$$aI_1 + bI_2 = U,$$
$$bI_1 + cI_2 = 0,$$

d'où

$$\frac{I_1}{-c} = \frac{I_2}{b} = \frac{U}{b^2 - ac}$$

ou

$$U = \left(a - \frac{b^2}{c}\right)I_1,$$

avec

$$a = R_1 + L_1\omega\sqrt{-1}, \qquad b = M\omega\sqrt{-1}, \qquad c = R_2 + \left(L_2 - \frac{1}{C\omega^2}\right)\omega\sqrt{-1}.$$

On pourra donc écrire

$$U = (\rho + \lambda\omega\sqrt{-1})\,I_1$$

avec

$$\rho = R_1 + \frac{M^2\omega^2}{Z^2}R_2, \qquad Z^2 = R_2^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2,$$
$$\lambda = L_1 - \frac{M^2\omega^2}{Z^2}\left(L_2 - \frac{1}{C\omega^2}\right),$$

Z étant l'impédance conformément aux conventions ci-après.

Digitized by Google

Définitions. — D'après la Commission électrotechnique internationale, les symboles internationaux sont les suivants :

W l'énergie;
t le temps;
n le nombre de tours dans l'unité de temps;
T la période;
ω la pulsation $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$;
f la fréquence;
R la résistance;
C la capacité;
L la self-induction;
Z l'impédance;
M l'inductance mutuelle;
X la réactance.

La définition de la réactance n'est pas donnée, mais le formulaire de Strœker indique

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}.$$

Je me suis donc, à peu près, conformé à ces notations, la fréquence f pouvant être considérée comme le nombre de tours d'un vecteur.

J'ajouterai, à cette liste, les grandeurs suivantes que je vais avoir à considérer :

réluctance..... S ou $\mathfrak{R}$;
flux magnétique..... Φ ou $\mathfrak{F}$;
induction magnétique.... B ou $\mathfrak{B}$;
champ magnétique ..... H ou $\mathfrak{H}$;
perméabilité..... μ;
susceptibilité..... $\varkappa$.

Revenons à la question :

Si l'on avait

$$\frac{M\omega}{Z} = 1,$$

on pourrait dire, très simplement :

Tout se passe dans le circuit primaire, en faisant abstraction du

Digitized by Google

circuit secondaire, comme si les résistances s'ajoutaient, tandis que les self-inductances se retrancheraient.

Il faut remarquer que la self-inductance du secondaire peut être positive ou négative, son signe est celui de la réactance secondaire

$$X = L_2\omega - \frac{1}{C\omega}.$$

Mais il y a lieu de remarquer expressément dans cet énoncé qu'on ne distingue pas entre les diverses parties constitutives de la self-inductance ou de la résistance; on considère en bloc celles qui appartiennent au transformateur et celles qui appartiennent au reste des circuits.

Examinons donc de plus près le rôle du transformateur.

Soient l_1, l_2 les self-inductances des circuits primaire et secondaire du transformateur, L′ et L″ les self-inductances des circuits primaire et secondaire, en dehors du tranformateur, on aura

$$L_1 = l_1 + L', \qquad L_2 = l_2 + L''$$

et, si le transformateur est sans fuites magnétiques, ce que nous supposerons,

$$M^2 = l_1 l_2.$$

On en déduit

$$\lambda = l_1 + L' - \frac{l_1 l_2}{l_2 + L'' - \frac{1}{C\omega^2}}$$

ou

$$\lambda = L' + \frac{l_1\left(L'' - \frac{1}{C\omega^2}\right)}{l_2 + L'' - \frac{1}{C\omega^2}}.$$

Supposons la self-inductance du secondaire $L'' - \frac{1}{C\omega^2}$ faible vis-à-vis de la self-inductance l_2 du transformateur, il restera

$$\lambda = L' + \frac{l_1}{l_2}\left(L'' - \frac{1}{C\omega^2}\right).$$

Supposons encore L″ faible vis-à-vis de $\frac{1}{C\omega^2}$, il restera

$$\lambda = L' - \frac{l_1}{l_2}\frac{1}{C\omega^2}.$$

Digitized by Google

Je pose

$$\frac{l_2}{l_1} = a^2,$$

et j'ai

$$U = (\rho + \lambda\omega\sqrt{-1})\,I_1$$

ou

$$i_{eff} = \frac{e_{eff}}{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2\omega^2}}.$$

Si je fais varier c, le maximum de i_{eff} sera obtenu quand j'aurai

$$\lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad L'C\omega^2 a^2 = 1.$$

C'est cette condition qu'on appelle *la condition de résonance primaire.*

Quand elle est satisfaite, le courant i_1 et la force électromotrice sont en phase.

On tâche toujours de se placer dans ces conditions.

Il importe de calculer $\frac{l_1}{l_2}$.

Considérons donc le flux magnétique qui traverse le primaire, quand il est seul parcouru par un courant i, ce flux d'induction sera

$$l_1 i.$$

D'autre part, si H est l'intensité moyenne du champ magnétique, S la section moyenne de ce flux, μ la perméabilité magnétique, n le nombre de tours du primaire, on aura

$$l_1 i = n_1 S \mu H.$$

De même, soit s la longueur moyenne d'un tube d'induction magnétique, tube fermé sur lui-même, comme l'on sait, le travail de la force magnétique sera

$$Hs.$$

Mais ce travail doit être égal au produit par 4π du flux de courant embrassé, qui est ici $n_1 i$. On a donc

$$4\pi n_1 i = Hs.$$

L'élimination de $\frac{i}{H}$ donne

$$l_1 = 4\pi \frac{n_1^2}{\mathcal{R}},$$

Digitized by Google

en posant

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu}\frac{s}{S}.$$

$\mathcal{R}$ est la *réluctance* du circuit magnétique. Cette quantité est pour le flux d'induction l'analogue de la résistance pour le flux de courant.

Il résulte de là qu'on a

$$\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2,$$

n_2 étant le nombre de tours du transformateur au secondaire, et

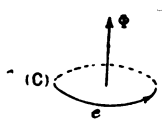
$$a = \frac{n_2}{n_1}$$

n'est autre que ce qu'on appelle industriellement *le rapport de transformation*.

LE TRANSFORMATEUR.

Je considère un circuit (C) conducteur enveloppant un flux magnétique Φ. Je prends comme sens positif de ce circuit celui qui tourne dans le sens dextrorsum autour de la direction positive de Φ. Je prends ce sens pour sens positif du courant et de la force électromotrice dans le circuit (C) ou tout autre circuit enveloppant le même flux Φ. Dans ces conditions, le flux qui serait dû au courant positif i lui-même aurait pour direction la direction positive de Φ et, par application de la loi de Lenz, on a pour la force électromotrice

Fig. 50.



induite

$$-\frac{d\Phi}{dt}.$$

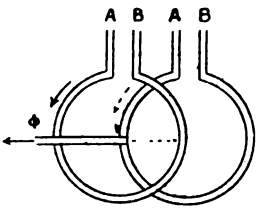
Cela posé, les équations du transformateur figuré schématiquement ci-contre seront

$$(1)\qquad \begin{cases} V_A - V_B = r\,i + n\,\dfrac{d\Phi}{dt}, \\ V_{A'} - V_{B'} = r'\,i' + n'\,\dfrac{d\Phi'}{dt}, \end{cases}$$

Digitized by Google

en appelant r la résistance des n spires du primaire et r' la résistance des n' spires du secondaire.

Fig. 51.



Je pose, pour simplifier,

$$V_A - V_B = e, \qquad V_{A'} - V_{B'} = e'.$$

Si le secondaire est fermé sur une résistance R', j'aurai

$$V_{B'} - V_{A'} = R' i'$$

ou

$$e' = - R' i'.$$

Dans le transformateur, le flux Φ est dû aux ampères-tours ni et $n'i'$, de sorte que si $\mathcal{R}$ est la réluctance du circuit magnétique, on a

$$\Phi = \frac{4\pi}{\mathcal{R}} (ni + n' i'). \tag{2}$$

Je suppose, tout d'abord, dans toute cette étude, que le transformateur est sans fuite, de sorte que Φ et Φ' des équations (1) se confondent avec le Φ de l'équation (2).

Les équations (1) deviennent

$$\left| \begin{array}{l} e = r i + n \dfrac{d\Phi}{dt}, \\ e' = r' i' + n' \dfrac{d\Phi}{dt}. \end{array} \right. \tag{3}$$

Les forces électromotrices induites $- n \dfrac{d\Phi}{dt}$, $- n' \dfrac{d\Phi}{dt}$, sont dans le rapport de n à n'. C'est ce qui vaut au rapport $\dfrac{n'}{n}$ le nom de rapport de transformation.

Pour simplifier, faisons $r' = 0$ et représentons par un diagramme les équations (2) et (3).

Digitized by Google

Soit

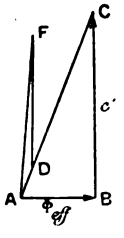
$$AB = \Phi_{eff}.$$

Représentons par de grandes lettres les valeurs efficaces de i, i', e et e'; nous aurons

$$(4) \qquad -BC = \frac{4\pi}{\mathfrak{R}} n' I', \qquad AC = \frac{4\pi}{\mathfrak{R}} n I.$$

Supposons qu'il n'y ait pas de charge inductive dans le circuit relié

Fig. 52.



aux bornes du secondaire, et qu'on ait par suite

$$e' = -R' i',$$

R' étant une simple résistance ohmique et non un facteur symbolique de la forme $(a + b\mathfrak{D})$. Alors il vient

$$-R' i' = n' \frac{d\Phi}{dt}.$$

Donc i' est en quadrature avec Φ et en retard d'un quart de période. L'angle de CB avec AB est donc de 90° et de signe négatif, ce qui justifie le signe de la première équation (4) et la disposition de la figure.

Portons maintenant en AD sur AC le vecteur r I, puis en DF le vecteur

$$n\omega\Phi_{eff}, \quad \text{perpendiculaire à AB};$$

alors, d'après la première équation (3), AF représentera $e_{eff} = E$.

Soient φ l'angle de AF avec AC et ψ l'angle de CB avec CA. Ces deux angles seront très sensiblement égaux si AD est petit.

Projetons AF sur AD, nous avons

$$(5) \qquad \text{proj AF} = E\cos\varphi = \text{proj AD} + \text{proj DF} = rI + n\omega\Phi_{eff}\cos\psi.$$

De même, en projetant AC sur BC, nous avons, en confondant les

Digitized by Google

angles ψ et φ,

$$\frac{4\pi}{\mathfrak{R}} n\,\mathrm{I}\cos\varphi = \frac{4\pi}{\mathfrak{R}} n'\mathrm{I}' \qquad \text{ou} \qquad n\,\mathrm{I}\cos\varphi = n'\mathrm{I}', \tag{6}$$

et d'ailleurs la seconde équation (3) se réduit à

$$e' = n'\frac{d\Phi}{dt},$$

qui donne

$$\mathrm{E}' = n'\omega\Phi_{\mathrm{eff}}. \tag{7}$$

L'équation (5) devient, par multiplication par I,

$$\mathrm{EI}\cos\varphi = r\mathrm{I}^2 + n\cos\psi\,\mathrm{I}\omega\Phi_{\mathrm{eff}},$$

puis, en faisant $\varphi = \psi$, et en tenant compte de (6) et (7),

$$\mathrm{EI}\cos\varphi = r\mathrm{I}^2 + n'\mathrm{I}'\omega\Phi_{\mathrm{eff}}$$

ou

$$\mathrm{EI}\cos\varphi = r\mathrm{I}^2 + \mathrm{I}'\mathrm{E}'. \tag{8}$$

Cette équation (8) exprime la conservation de l'énergie.

Supposons maintenant le triangle ABC construit à une échelle différente; AC représentera le courant i, CB représentera le courant $\frac{n'}{n}i'$, alors, par définition, nous dirons que

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

qui est un vecteur proportionnel à Φ représente le courant magnétisant J et l'on aura, dans le triangle rectangle,

$$\mathrm{J}^2 = \mathrm{I}^2 - \left(\frac{n'}{n}\right)^2\mathrm{I}'^2. \tag{9}$$

Cela posé, je décompose I en deux vecteurs rectangulaires

$$\mathrm{I}_w = \mathrm{I}\cos\varphi, \qquad \mathrm{I}_m = \mathrm{I}\sin\varphi, \tag{10}$$

et comme φ et ψ ne se distinguent guère l'un de l'autre dans la pratique, pour la raison que nous dirons plus loin, on a, dans le triangle rectangle ABC,

$$n\,\mathrm{I}\cos\psi = n'\mathrm{I}' \qquad \text{ou} \qquad n\,\mathrm{I}\cos\varphi = n'\mathrm{I}', \tag{6}$$

Digitized by Google

comme nous l'avons déjà vu dans l'équation (6); d'où

$$I_w = \frac{n'}{n} I'. \tag{11}$$

La composante I_w s'appelle le courant watté; l'équation (9) devient

$$J^2 = I^2 - I_w^2. \tag{12}$$

Or les équations (10) donnent

$$I_m^2 = I^2 - I_w^2, \tag{13}$$

d'où

$$I_m = J. \tag{14}$$

C'est pour cette raison (éq. 14) que la composante I_m s'appelle le courant magnétisant.

Ce courant magnétisant joue dans un transformateur le même rôle que le courant inducteur dans un alternateur; or, dans un alternateur, on fera toujours en sorte de diminuer le plus possible la dépense d'excitation; pour la même raison, dans un transformateur, on économisera le plus possible la dissipation d'énergie due à la composante I_m. Dès lors, le côté AB du triangle ABC sera égal à quelques centièmes des grandeurs des autres côtés; c'est ce qui explique pourquoi nous avons pu confondre les angles φ et ψ.

Si nous négligeons ri et $r'i'$, nous avons

$$e' = \frac{n'}{n} e, \tag{15}$$

donc e' est sensiblement indépendant du débit: c'est en cela que consiste la propriété du transformateur d'être autorégulateur de tension.

On a

$$e - ri = n \frac{d\Phi}{dt}. \tag{1}$$

Négligeons ri, passons aux valeurs efficaces, il vient

$$E = n\omega\Phi_{eff}. \tag{16}$$

Dans ces conditions, le flux Φ_{eff} reste constant en même temps que la force électromotrice appliquée E.

Digitized by Google

Considérons alors le triangle ABC, si AB reste constant, le point C se déplace suivant la perpendiculaire BC à AB, et AC représente le courant primaire et sa grandeur permet d'en suivre les variations.

INFLUENCE DU DÉPHASAGE.

Supposons que I' conserve une valeur constante, mais que la phase φ de i'' varie. C'est ce qu'on pourra obtenir en faisant varier la réluctance d'une bobine de self-induction placée dans le circuit secondaire.

Appelons j et j'' ce que deviennent les courants i et i'' quand la charge devient inductive. On avait

$$\Phi = \frac{4\pi}{\mathcal{R}}(ni + n'i''),$$

et si la réluctance du transformateur n'a pas varié, on a

$$\Phi = \frac{4\pi}{\mathcal{R}}(nj + n'j''),$$

d'où

$$n(j - i) + n'(j'' - i'') = 0.$$

Projetons sur AB. La projection de $j'' - i''$ se réduit à celle de j', puisque i'' était en quadrature avec Φ. On a donc

$$J_m = J - \frac{n'}{n} J'_m,$$

J'_m étant la composante du nouveau courant, qui est en phase avec le flux. Cette composante, introduite par le déphasage, exerce une action démagnétisante.

Donc l'introduction d'un décalage dans le circuit secondaire provoque un appel de courant au primaire pour maintenir le flux.

INFLUENCE DES FUITES. LEUR DÉTERMINATION.

Si le transformateur a des fuites magnétiques, cela veut dire que les équations doivent être modifiées par l'introduction de termes correctifs, correspondant à la self-inductance du primaire et à la self-inductance du secondaire.

On peut, par la pensée, décomposer le transformateur en deux parties, l'une constituée par un transformateur sans fuite, l'autre formée par deux bobines de self-induction.

Digitized by Google

Nous avons déjà étudié analytiquement ce cas.

Si je ferme le transformateur en court circuit, et si je néglige les résistances ohmiques, je pourrai écrire entre les valeurs efficaces la relation

$$E = \left[L + \left(\frac{n}{n'}\right)^2 L'\right] \omega I. \tag{17}$$

Si, d'ailleurs, comme c'est généralement le cas, la réluctance $\mathcal{R}$ est faible, j'aurai

$$ni + n'i' = \frac{\mathcal{R}}{4\pi}\Phi = 0,$$

d'où, en passant aux valeurs efficaces,

$$nI = n'I', \tag{18}$$

ce qui revient à négliger le courant magnétisant, et pour mesurer

$$L + \left(\frac{n}{n'}\right) L',$$

il suffira de mesurer E avec un voltmètre dans le primaire et I' avec un ampèremètre dans le secondaire : (18) donnera I et (17) donnera la self-inductance totale.

Il faudra pouvoir disposer d'une force électromotrice E assez élevée pour qu'on puisse amener I' au secondaire à la valeur qu'il a normalement en charge.

On peut avoir L par une autre expérience, faite, celle-ci, à circuit ouvert.

Les équations générales sont :

$$\begin{cases} e = r\,i + L\,\dfrac{di}{dt} + n\,\dfrac{d\Phi}{dt}, \\ e' = r'i' + L'\,\dfrac{di'}{dt} + n'\,\dfrac{d\Phi}{dt}. \end{cases} \tag{19}$$

A circuit ouvert, j'ai

$$i' = 0, \qquad e' = n'\frac{d\Phi}{dt}. \tag{20}$$

Négligeons de plus ri, la première équation (19) devient

$$e = L\frac{di}{dt} + \frac{n}{n'}e'. \tag{21}$$

Digitized by Google

L'équation (20) montre que e' est en quadrature avec Φ, l'équation (2), à circuit secondaire ouvert, se réduit à

$$\Phi = \frac{4\pi}{\mathcal{R}} ni.$$

Donc e' est en quadrature avec i, puisque i est en phase avec Φ.

Donc e et e' sont en phase d'après (21).

Et par suite

$$e - \frac{n}{n'} e'$$

a pour valeur efficace

$$E - \frac{n}{n'} E',$$

différence entre la force électromotrice appliquée efficace E et la fraction $\frac{n}{n'}$ de la force électromotrice efficace E' qu'on peut mesurer au moyen d'un voltmètre thermique appliqué aux bornes du secondaire.

On aura alors L par l'équation aux valeurs efficaces déduite de (21) savoir

$$E - \frac{n}{n'} E' = L\omega I,$$

pourvu qu'on mesure également à l'ampèremètre l'intensité efficace I du primaire.

ALTERNATEUR A RÉSONANCE.

Considérons un anneau Gramme qui tourne au milieu du champ magnétique produit par deux pôles nord et sud.

Soit Oz l'axe de révolution de l'anneau. C'est un tore dont la méridienne sera, par exemple, un rectangle ayant l'une de ses dimensions dans le sens de l'axe. J'appellerai L cette longueur. Cet anneau est garni d'un enroulement uniforme constitué par du fil isolé à sa surface ou par des barres logées dans des trous ou dans des encoches. Chaque spire coïncide sensiblement avec un rectangle méridien. Les diverses spires sont reliées les unes aux autres de façon à constituer un enroulement continu. Et deux spires situées à l'opposé l'une de l'autre aux deux extrémités d'un même diamètre sont reliées respectivement à deux bagues collectrices, où l'on prendra le courant engendré dans

Digitized by Google

cet induit, pendant sa rotation dans les champs inducteurs, fixes de grandeur et de direction. Admettons qu'il y ait $2n$ spires.

Pour définir la position d'une spire sur l'induit, je diviserai sa périphérie en $2n$ parties égales à Δx, et j'appellerai, d'une façon générale, x la distance comptée sur la périphérie entre la $i^{\text{ième}}$ spire et celle qui est reliée à une bague. On aura donc

$$x = i\,\Delta x.$$

Et si λ est la longueur de la circonférence, j'aurai

$$\lambda = 2n\,\Delta x.$$

Le champ est fixe et a une composante radiale qui varie de façon périodique quand on tourne autour de l'entrefer. Pour définir la position du point considéré, j'appellerai x' la distance de ce point à celui pour lequel le champ radial est nul. Le champ $\mathcal{H}$ aura alors pour expression, en première approximation,

$$\mathcal{H} = H \sin \frac{2\pi x'}{\lambda}.$$

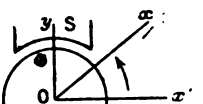
La force électromotrice induite dans une barre i est $E_i = \mathcal{H} l V$, V étant la vitesse périphérique de l'induit. On aura donc

$$E_i = HlV \sin \frac{2\pi x'}{\lambda}.$$

Mais on a d'ailleurs une relation entre les coordonnées x et x' qui définissent la position d'une barre par rapport à l'induit ou par rapport au champ. Je supposerai que j'ai compté x et x' positivement dans le sens de la vitesse V.

Pour préciser, soient Ox' la direction du champ radial nul, Oy' la

Fig. 53.



direction positive du champ, Oz la direction positive de l'axe de rotation formant avec Ox' et Oy' un trièdre droit $\begin{pmatrix} Ox, Oy, Oz \\ E\ \ N\ \ Z \end{pmatrix}$ (Est, Nord,

Digitized by Google

Zénith). On aura

$$x' = x + Vt,$$

en comptant les temps à partir de la coïncidence de Ox et de Ox'.

Dans ces conditions, la barre qui passe devant le pôle nord est le siège d'une force électromotrice dirigée suivant l'axe des z. Je marque ce sens en faisant un rond centré, représentant la pointe d'une flèche qui se dirige vers moi. Si le sens était inverse, je ferais un rond marqué d'une croix représentant l'encochage d'une flèche qui s'éloigne.

On aura donc

$$\Sigma E_i = 2HLV\frac{n}{\lambda}\Sigma \sin\frac{2\pi}{\lambda}(x + Vt)\Delta x.$$

Si Δx est assez petit, on pourra remplacer cette somme par une intégrale prise de $x = o$ à $x = \frac{\lambda}{2}$ et l'on aura pour la force électromotrice totale

$$E = 2HLV\frac{n}{\lambda} \times \frac{\lambda}{\pi}\cos\left(Vt\frac{2\pi}{\lambda}\right) = 2HLV\frac{n}{\pi}\cos\left(Vt\frac{2\pi}{\lambda}\right).$$

Si la machine, au lieu d'avoir deux pôles, en a quatre, $2n$ sera le nombre de barres par champ et λ la périphérie correspondante. Il n'y aura pas d'autre modification.

Soit ω la vitesse de rotation, on aura, en appelant T la durée d'un tour dans le cas de la machine bipolaire ou la durée de traversée d'un champ complet (N.-S.) dans le cas de la machine multipolaire,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \lambda = VT,$$

d'où

$$E = 2HLV\frac{n}{\pi}\cos\omega t.$$

Cette force électromotrice est ce que nous appellerons la *tension à vide*.

RÉACTION D'INDUIT.

Supposons maintenant que les pôles soient dus à des électro-aimants; et admettons que le fer de ces électro-aimants ne soit pas saturé; alors le courant qui circule dans l'induit aura une réaction sur le champ produit par le courant continu d'excitation.

Examinons cette réaction d'induit.

Digitized by Google

Le courant $\mathfrak{I}$ sera de la forme

$$\mathfrak{I} = I\cos(\omega t + \varphi),$$

l'angle φ dépendant essentiellement des self-inductances et des capacités intercalées dans le circuit d'utilisation. On aura donc

$$\mathfrak{I} = I\cos\omega t\cos\varphi - I\sin\omega t\sin\varphi,$$

de sorte que le courant $\mathfrak{I}$ est la somme algébrique de deux courants : $I\cos\varphi$, en phase avec la force électromotrice, et $I\sin\varphi$, en avance d'un quart de période sur la force électromotrice.

Dans la représentation vectorielle des quantités périodiques, ces deux courants seront figurés l'un par un vecteur $I_0\cos\varphi$, dans la direction de la force électromotrice, l'autre par un vecteur $I_0\sin\varphi$ en avance de 90° sur la force électromotrice, puisque $\sin(-\omega t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Voyons les effets de l'une et l'autre de ces composantes.

La première est appelée *courant watté*, la seconde est appelée *courant de magnétisation*.

Supposons $\varphi = 0$. Considérons la barre qui coupe le flux du pôle nord ; le courant, à ce moment, étant en phase avec la force électromotrice, sera dans la direction Oz ; il sera entouré de lignes de force magnétiques dues à son intensité, et ces lignes couperont le pôle transversalement. En présence du pôle nord, la composante radiale de ce champ est nulle, elle est négative au point de l'induit actuellement sur l'axe Ox. Le flux de l'induit étant une fonction périodique de l'arc x' pourra, en première approximation, se représenter par

$$-H_1\cos\frac{2\pi x'}{\lambda}.$$

Supposons $\varphi = 90°$. Alors le courant est dirigé suivant Oz et atteint son maximum dans une barre, au moment où cette barre coupe la direction négative de l'axe des x ; c'est au bout d'un quart de tour que la force électromotrice, à son tour, sera maximum dans cette barre. Or, si l'on considère les lignes de force magnétiques dont cette barre s'entoure, on voit qu'elles se ferment par le circuit magnétique des inducteurs en les renforçant. La composante radiale de ce champ

Digitized by Google

pourra donc se représenter par la fonction

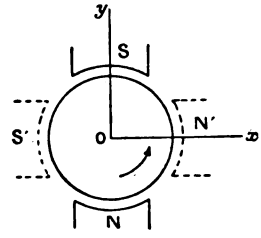
$$H_2 \sin \frac{2\pi x'}{\lambda}.$$

D'autre part, le champ dû à l'induit est variable à la fois dans le temps et dans l'espace, puisque le courant est alternatif et que l'induit tourne. Mais ce flux magnétique peut se décomposer en deux composantes d'intensité constante, ainsi qu'on le sait bien d'après Fresnel, l'une de ces composantes étant animée de la vitesse de rotation $+\omega$, par rapport à l'induit, et l'autre de la vitesse $-\omega$. Composons maintenant ce mouvement de rotation avec celui de l'induit ; l'un des flux tourne avec la vitesse 2ω, l'autre devient fixe et, d'ailleurs invariable dans le temps, il est doublement constant.

En munissant les pièces polaires des inducteurs de circuits amortisseurs, on atténuera l'effet du flux à marche rapide et nous en ferons abstraction.

Ainsi la réaction d'induit peut être décomposée en deux flux : le

Fig. 54.



flux dû au courant watté correspond à des pôles fictifs N'S' en avance de 90° sur NS dans le sens du mouvement ; celui dû au courant magnétisant est dirigé comme le champ inducteur primitif si le courant a une avance de phase de 90° et est dirigé en sens contraire si le courant est en retard.

Au champ dû au courant watté correspond une force électromotrice de la forme

$$E_2 = h_w I \omega \cos\varphi,$$

qui atteindra son maximum un quart de période après la force électromotrice à circuit ouvert E.

Au champ dû au courant magnétisant correspond une force électro-

Digitized by Google

motrice de la forme

$$E_2 = h_m I \omega \sin \varphi,$$

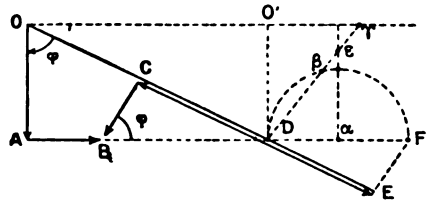
qui est en phase avec la force électromotrice E si le courant atteint son maximum un quart de période avant que la force électromotrice E n'atteigne le sien.

DIAGRAMME VECTORIEL ET VARIATION DE L'INTENSITÉ, EN FONCTION DE L'INDUCTANCE DE RÉGLAGE.

Cela posé, on aura l'équation vectorielle

$$\overline{E} + \overline{E}_1 + \overline{E}_2 = \overline{RI} + \overline{L\omega I}.$$

Fig. 55.



Soient

$\overrightarrow{OE}$	le vecteur	E,
$\overrightarrow{OA}$	»	RI,
$\overrightarrow{AB}$	»	$L\omega I$,
$\overrightarrow{EC}$	»	$h_m I \omega \sin \varphi$,
$\overrightarrow{CB}$	»	$h_w I \omega \cos \varphi$.

Sur la figure, l'angle φ correspond à un retard du courant sur la force électromotrice OE; R est la résistance totale du circuit, L est la self-inductance totale; si L_r est la self-inductance de réglage, si s est celle due aux fuites magnétiques, si C est la capacité du condensateur que l'on charge par l'intermédiaire d'un transformateur de rapport de transformation égal à a, on aura

$$L = L_r + s - \frac{1}{C a^2},$$

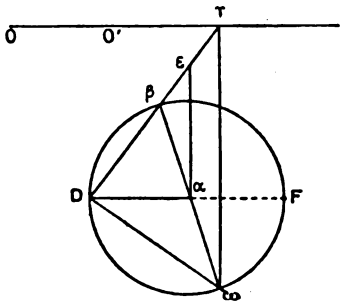
et si L devient négatif, c'est que la réactance totale sera devenue négative.

Digitized by Google

La force électromotrice $\overrightarrow{CB}$ est en retard d'un quart de période sur $\overrightarrow{OE}$ et la force électromotrice $\overrightarrow{EC}$ est en opposition avec $\overrightarrow{OE}$ parce que l'angle φ représente un retard.

Il est dès lors commode de conserver le même diagramme, en changeant l'échelle, de façon que toutes les lignes de la figure représentent les grandeurs précédemment indiquées divisées par I.

Fig. 56.



Alors on a évidemment

$$BD = h_w \omega,$$
$$BE = h_m \omega,$$

et ces deux quantités doivent être considérées comme constantes, puisqu'elles sont indépendantes de L. De même OA restera constant de grandeur, puisqu'on ne modifie pas la résistance du circuit. Mais l'angle φ variera avec L. Enfin, comme l'excitation reste constante, le vecteur $OE = \frac{E}{I}$ varie en raison inverse de I.

Il en résulte que les points C et E décrivent deux circonférences sur BD et DF comme diamètres, que le point O décrit une parallèle à BDF.

Lorsque le point A passe à droite de B, la self-inductance L devient négative; cela veut dire en réalité que la réactance du circuit devient négative.

Quand le point A vient en D, le point O vient en O', le courant est en phase avec la force électromotrice et l'impédance se réduit à la résistance.

Puis le point A dépassant cette position, le segment OC compris entre la droite OO' et le cercle (DF) diminue et par suite le courant I augmente. Le courant maximum n'est donc pas en phase. Le courant I

Digitized by Google

sera maximum lorsque le segment OE sera minimum, c'est-à-dire quand il aura pris la position $\gamma\beta$, pour laquelle son milieu ε se projette en α sur le milieu de DF.

En effet, si alors $\beta\gamma$ est minimum, on peut, pendant un déplacement très petit, le considérer comme une droite de grandeur constante dont les deux extrémités s'appuient d'une part sur la droite OO', d'autre part sur le cercle (DF), tandis que la direction $\beta\gamma$ passe par le point D fixe, le centre instantané de rotation doit donc se projeter en γ sur OO', être sur la normale $\beta\alpha$ en β au cercle (DF) et se projeter sur $\beta\gamma$ en D qui est le point où $\beta\gamma$ touche son enveloppe. Ces trois conditions sont satisfaites simultanément pour le point ω diamétralement opposé à β sur le cercle (DF), α étant le milieu de $\beta\omega$, comme ε est le milieu de $\beta\gamma$, la droite $\omega\gamma$ est parallèle à $\alpha\varepsilon$, donc normale à OO', de même $\omega\alpha\beta$ étant un diamètre, $\omega D\beta$ est un angle droit. Les conditions requises sont donc satisfaites.

Si l'on a alors $L_r = 0$ ou $L = -\frac{1}{Ca^2\omega^2} + s$, l'alternateur est dit *à résonance*.

Charge, couple et stabilité. — Si la force électromotrice efficace de l'alternateur est E, pour la vitesse angulaire Ω, elle sera

$$E\frac{\omega}{\Omega}$$

pour la vitesse ω, si l'on maintient l'excitation constante.

Si l'alternateur débite sur un circuit coupé par un condensateur, l'intensité efficace sera donnée par

$$I = \frac{E\frac{\omega}{\Omega}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Je prends d'ailleurs pour pulsation Ω la pulsation

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

Dans ces conditions la charge W sera

$$W = RI^2 = \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \frac{E^2 R}{R^2 + L^2\left(\omega - \frac{\Omega^2}{\omega}\right)^2},$$

Digitized by Google

et l'on aura pour le couple

$$C = \frac{W}{\omega} = \frac{\omega}{\Omega^2} \frac{E^2 R}{R^2 + L^2 \left(\omega - \frac{\Omega^2}{\omega}\right)^2}.$$

Si on a $\omega = \Omega$, le dénominateur est minimum et sa variation instantanée est nulle; comme le numérateur est proportionnel à ω, on voit que C est croissant, mais C s'annule pour ω infini, donc, dans l'intervalle, C passe par un maximum; soit ω_1 cette valeur; elle est supérieure à Ω. Mais comme elle serait égale à Ω, si R était nul, puisque C passerait alors par l'infini, on voit que si R est petit, ω_1 est très voisin de Ω. C'est ce qui a lieu dans tous les cas de la pratique.

Si donc on marche à une vitesse $\omega > \omega_1$, le couple sera décroissant; donc si pour une raison quelconque ω vient à augmenter, le couple diminuera et cette diminution rétablira l'équilibre ou tout au moins contribuera à la stabilité.

Si je pose

$$g = \frac{\omega - \Omega}{\Omega},$$

j'aurai

$$C = \frac{1+g}{\Omega} \frac{E^2 R}{R^2 + L^2 \Omega^2 \left[\frac{(1+g)^2 - 1}{1+g}\right]^2},$$

ou sensiblement

$$C = \frac{E^2}{\Omega R} \frac{(1+g) R^2}{R^2 + 4 L^2 \Omega^2 g^2},$$

en supposant que g soit petit.

On pourra prendre pour mesure de la stabilité de régime l'expression

$$\frac{1}{\Omega} \frac{dC}{dg} = \frac{E^2}{\Omega^2 R} \frac{R^4 - 8 R^2 L^2 \Omega^2 g - 4 R^2 L^2 g^2}{(R^2 + 4 L^2 \Omega^2 g^2)^2}.$$

EMPLOI DU WATTMÈTRE.

Le wattmètre est un instrument de mesure qui donne la puissance fournie aux bornes AB d'un appareil récepteur ou d'une installation quelconque, mais qui exige que l'on prenne quelques précautions pour interpréter ses indications.

Digitized by Google

Soient

u la différence de potentiel aux bornes;
i le courant fourni;
W la puissance;
T la période du courant alternatif;

la puissance à mesurer est

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt = u_{eff} i_{eff} \cos\varphi, \tag{1}$$

φ étant le décalage entre le courant et la différence de potentiel. Le courant est supposé sinusoïdal.

Le wattmètre comporte deux bobines, l'une à gros fil (au besoin shuntée) est parcourue par le courant i, l'autre à fil fin est mise entre les bornes et la différence de potentiel entre ses extrémités est u. Soit i' le courant qui passe entre les bornes dans la bobine à fil fin. L'on mesure la force qui s'exerce entre les deux bobines, laquelle est proportionnelle à ii'. Supposons tout d'abord qu'on étalonne l'appareil en courant continu. On aura, r étant la résistance de la bobine à fil fin,

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt = u \times i = ri i', \tag{2}$$

quel que soit T.

D'autre part, l'indication du wattmètre sera dans ce même cas, k étant un coefficient de proportionnalité

$$W' = \frac{k}{T}\int_0^T ii'\,dt = kii'. \tag{3}$$

Faisons $k = r$, l'appareil sera alors étalonné pour que sa lecture W' donne les watts.

Opérons maintenant en courant alternatif; soient l la self-inductance de la bobine en fil fin, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation; posons

$$z\cos\varphi_w = r, \qquad z\sin\varphi_w = l\omega, \tag{4}$$

l'indice w indiquant que la phase φ dépend des constantes r et l du wattmètre. On aura

$$u = ri' + l\frac{di'}{dt}, \tag{5}$$

Digitized by Google

c'est-à-dire

$$i'_{\text{eff}} = \frac{u_{\text{eff}} \cos \varphi_w}{r}, \tag{6}$$

et la lecture du wattmètre sera

$$W' = \frac{r}{T} \int_0^T ii' \, dt = r \, i_{\text{eff}} i'_{\text{eff}} \cos(ii'). \tag{7}$$

Or, les intensités i et i' ayant avec u les différences de phase φ et φ_w, elles ont l'une par rapport à l'autre la différence de phase $\varphi - \varphi_w$, et il vient, en tenant compte de (6),

$$W' = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \varphi_w \cos(\varphi - \varphi_w). \tag{8}$$

Si le wattmètre était exact, il devrait donner la valeur (1). Il convient donc de multiplier ses indications par

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_w \cos(\varphi - \varphi_w)} = \frac{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi_w}{1 + \operatorname{tang} \varphi_w \operatorname{tang} \varphi}.$$

On peut bien, par construction, faire en sorte que φ_w soit petit, mais les indications brutes du wattmètre seront cependant inexactes si $\operatorname{tang} \varphi$ est grand.

Pour se servir correctement du wattmètre, il faut donc connaître la constante de temps $\frac{r}{l}$, la fréquence (ou ω), puis pouvoir apprécier le décalage φ, lequel dépend de l'appareil ou de la machine aux bornes desquels le wattmètre est branché. Deux cas sont à considérer.

Premier cas. — S'il s'agit d'un réseau sans force électromotrice, il est facile de faire la mesure de φ.

Deuxième cas. — Si la machine est par exemple un alternateur, on déterminera φ comme suit :

1° On peut déterminer la force électromotrice de l'alternateur pour une excitation donnée, au moyen d'un voltmètre mis entre les bornes de la machine; c'est en somme la différence de potentiel à circuit ouvert. J'aurai ainsi e_{eff}.

2° On peut déterminer l'impédance de l'induit en mesurant pour la même excitation le courant de court circuit; si R est la résistance, L la self-inductance de cet induit, Ri est négligeable devant $L\frac{di}{dt}$ et par suite l'impédance mesurée est sensiblement égale à $L\omega$. De plus, le courant est décalé sensiblement à 90° en avance de la différence de

Digitized by Google

potentiel

$$Ri + L\frac{di}{dt}.$$

Si Ri est négligeable j'aurai L par $L\omega i_{eff,c} = e_{eff}$.

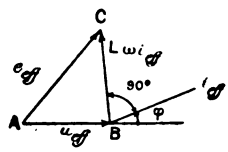
3° Si l'on mesure, dans les conditions de l'expérience, et pour l'excitation réellement existant actuellement, l'intensité i_{eff} et la différence de potentiel aux bornes u_{eff}, on peut construire le triangle dont les trois côtés sont

$$AC = e_{eff}, \qquad AB = u_{eff}, \qquad BC = L\omega i_{eff}.$$

L'angle de $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{BC}$ est égal à $+\varphi + \frac{\pi}{2}$.

C'est cet angle que nous nous proposions de déterminer; les mesures

Fig. 57.



à circuit ouvert et en court circuit avaient pour but de donner e_{ei} et $L\omega$, ce qui permet, avec les mesures de i_{eff} et de u_{eff}, de déterminer complètement le triangle ABC et par suite

$$W = u_{eff} i_{eff} \cos\varphi.$$

Si ces mesures sont faites sans qu'on ait cherché une grande sensibilité, elles permettront toujours d'avoir une valeur approchée de $\cos\varphi$ et permettront par suite de calculer avec une précision suffisante le facteur correctif du wattmètre.

En résumé, nous avons vu que les indications W' du wattmètre étalonné, au lieu d'être égales à

$$u_{eff} i_{eff} \cos\varphi,$$

sont égales (éq. 8) à

$$u_{eff} i_{eff} \cos\varphi_w \cos(\varphi - \varphi_w),$$

φ_w étant un petit angle dont la tangente est le rapport de la réactance à la résistance de la bobine à fil fin de l'appareil.

Si par une mesure directe on détermine l'angle φ, on pourra alors utiliser cette valeur pour calculer le facteur correctif du vattmètre. Une valeur approchée de φ suffira pour que le wattmètre soit utilement consulté pour fournir une évaluation correcte de la puissance.

Digitized by Google

CHAPITRE XVIII.

RÉGIME PÉRIODIQUE D'ÉMISSION DANS LES POSTES A ETINCELLES.

Dans les postes à étincelles de la télégraphie sans fil on a un circuit oscillant, analogue à ceux que nous avons étudiés précédemment. Il en diffère en ce que la résistance n'est pas une simple résistance ohmique. Le circuit comporte en effet un éclateur, et c'est pendant que l'étincelle jaillit à cet éclateur et que l'intervalle explosif est devenu conducteur, que les oscillations électriques entre le condensateur et l'inductance du radio-transformateur se produisent.

Jusqu'à quel point une étincelle peut-elle être assimilée à une résistance ?

C'est un problème important que je n'ai point abordé, parce que je me borne à établir les fondements mathématiques et que c'est une étude physique qui serait nécessaire.

Les résultats obtenus par les calculs qui vont suivre ne peuvent donc être considérés que comme une première approximation.

Pour produire les oscillations, on charge le condensateur et, quand le voltage aux bornes de l'éclateur a pris une valeur suffisamment élevée, l'étincelle jaillit; elle est le siège des oscillations à haute fréquence. Le condensateur se décharge.

Suivant les cas, on emploie pour charger le condensateur une force électromotrice constante ou une force électromotrice alternative.

De même, pour décharger le condensateur, on emploie un éclateur fixe ou un éclateur qui a une électrode mobile.

Si l'éclateur est fixe, la décharge se produit quand le voltage a pris une valeur déterminée. Le temps nécessaire pour que ce voltage soit atteint résulte des conditions électriques.

Quand l'éclateur est un éclateur tournant, il y a une étincelle chaque fois qu'une dent de l'éclateur tournant passe devant l'élec-

Digitized by Google

trode immobile de l'éclateur. En ce cas, la période est déterminée par la vitesse de rotation. .

Ce sont ces différents cas que j'examine en recherchant les conditions dans lesquelles le régime est stable. L'étincelle donne alors un son musical.

CHARGE DU CONDENSATEUR SOUS FORCE ÉLECTROMOTRICE CONSTANTE.

Un condensateur étant en train de se décharger dans un circuit oscillant qui comprend un éclateur, j'imagine que le voltage à ses bornes devienne égal à zéro et que l'étincelle s'éteigne à l'éclateur, tandis que le courant de charge a encore une intensité appréciable, que j'appellerai $+ i_0$, pour attribuer le sens positif au sens du courant qui charge une armature donnée du condensateur, celle qui est réunie au pôle + de la force électromotrice constante. La différence de potentiel V entre les armatures du condensateur étant nulle, à cette époque que je prends pour origine des temps, le condensateur se recharge sous la force électromotrice E et à l'époque t, le courant est i et l'armature considérée est à un potentiel V au-dessus du potentiel de l'autre armature.

Les équations du mouvement de l'électricité sont

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E - V,$$

$$C\frac{dV}{dt} = i;$$

L est le coefficient de self-induction du circuit de charge, R sa résistance, C est la capacité du condensateur, E est la force électromotrice constante.

Les conditions initiales sont

$$i = i_0, \qquad V = 0.$$

Enfin je suppose que le discriminant $R^2 - 4\frac{L}{C}$ est négatif, de sorte que le mouvement est périodique amorti. Enfin je pose, comme précédemment,

$$r\cos\theta = -\frac{R}{2L}, \qquad r\sin\theta = \omega, \qquad r^2 = \frac{1}{LC}, \qquad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2},$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}, \qquad \cos\theta = -\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}, \qquad \beta = \frac{R}{2L},$$

Digitized by Google

et j'ai de plus, évidemment,

$$Lr = \frac{1}{Cr} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Des deux équations différentielles, on tire

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0,$$

et l'on peut vérifier, à vue, d'après la règle de dérivation des fonctions périodiques amorties, les formules suivantes qui donnent la solution :

$$V = E\left(1 + e^{-\beta t}\frac{\sin(\omega t - \theta)}{\sin\theta}\right) + i_0\sqrt{\frac{L}{C}}\,e^{-\beta t}\frac{\sin\omega t}{\sin\theta},$$

$$i = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\beta t}\frac{\sin\omega t}{\sin\theta} + i_0 e^{-\beta t}\frac{\sin(\omega t + \theta)}{\sin\theta}.$$

Les conditions initiales sont évidemment satisfaites.

On vérifierait de même les formules

$$V = E + i_0\sqrt{\frac{L}{C}}\,e^{-\beta t}\frac{\sin(\omega t + \nu - \theta)}{\sin\nu},$$

$$i = i_0 e^{-\beta t}\frac{\sin(\omega t + \nu)}{\sin\nu}.$$

La condition initiale $i = i_0$ est satisfaite d'elle-même; la condition $V = 0$ détermine ν; on a

$$0 = E + i_0\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\sin(\nu - \theta)}{\sin\nu},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\nu = \frac{i_0\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}}{E - \frac{1}{2}Ri_0}.$$

RÉGIME MUSICAL.

Supposons qu'à l'époque τ, le potentiel V ayant atteint la valeur v, l'étincelle parte à l'éclateur et décharge instantanément le condensateur. Soit i_1 l'intensité du courant dans la machine à courant continu au moment où l'étincelle éclate, la décharge du condensateur étant instantanée, on peut admettre que l'énergie magnétique $\frac{1}{2}Li_1^2$ n'a pas

Digitized by Google

eu le temps de varier sensiblement pendant l'étincelle puisque ce terme représente l'inertie du système. Par suite, la valeur i_1 de i pour $V = e$ sera sensiblement la valeur initiale du courant au moment où la période de charge commence. Si l'on a $i_1 = i_0$, on se retrouve dans les mêmes conditions initiales que lors de la décharge précédente et le régime permanent périodique ainsi obtenu est celui de l'étincelle musicale. La période du son est τ.

Pour que le régime musical soit atteint, il faut qu'au bout du temps τ le courant reprenne sa valeur initiale

$$i = i_0,$$

d'où

$$(1) \qquad i = e^{-\beta\tau}\frac{\sin(\omega\tau + \nu)}{\sin\nu}.$$

D'autre part, à l'époque τ, le potentiel V a pris la valeur du potentiel explosif e, d'où

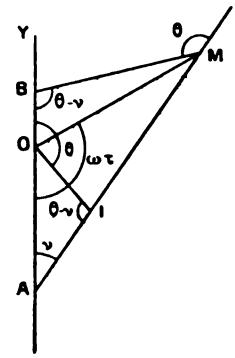
$$(2) \qquad e - E = i_0\sqrt{\frac{L}{C}}\,e^{-\beta\tau}\frac{\sin(\omega\tau + \nu - \theta)}{\sin\nu}$$

Enfin, pour déterminer l'angle ν, on a l'équation

$$(3) \qquad E + i_0\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\sin(\nu - \theta)}{\sin\nu} = 0.$$

Ces équations se prêtent à une représentation géométrique simple. Sur l'axe OY je porte $OA = E$ et $AB = e$. Sur la corde AB, je décris

Fig. 58.



le segment capable de l'angle $\pi - \theta$ et je prends son intersection avec la première spire de la spirale qui a pour équation en coordonnées

Digitized by Google

polaires

$$OM = E e^{\omega t},$$

ωt étant l'angle MOA.

Soient M cette intersection et $\omega\tau$ l'angle correspondant. Je dis que τ est la période du régime musical et que, si je mène par O la droite OI faisant avec OY l'angle θ, et coupant AM en I, on a

$$OI = i_0 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

J'ajoute que OAM sera égal à l'angle ν.

L'équation (1) est la traduction de la relation

$$\frac{OA}{\sin OMA} = \frac{OM}{\sin OAM}.$$

L'équation (3) est la traduction de la relation

$$\frac{OA}{\sin OIA} = \frac{OI}{\sin OAI}.$$

D'autre part, dans le triangle OMB, on a

$$\frac{OB}{\sin BMO} = \frac{OM}{\sin OBM}$$

ou

$$\frac{e - E}{\sin(\omega\tau + \nu - \theta)} = \frac{E e^{-\beta\tau}}{\sin(\theta - \nu)}.$$

On a vu que l'on avait

$$\sin(\theta - \nu) = \frac{E \sin\nu}{i_0 \sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Remplaçant $\sin(\theta - \nu)$ par cette valeur dans l'équation précédente, on retrouve l'équation (2).

On peut aussi, géométriquement, déterminer τ en fonction de ν et i_0 en fonction de τ et de e, c'est-à-dire obtenir les formules par la géométrie. Dans le triangle AOM, la formule connue

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

donne

$$AM^2 = E^2(1 + e^{-2\beta\tau} - 2e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau).$$

D'ailleurs, on a

$$AM = AI + IM,$$

Digitized by Google

et les triangles AOI, IMO donnent

$$\frac{AI}{\sin\theta} = \frac{E}{\sin(\theta - \nu)}, \qquad \frac{IM}{-\sin(\omega\tau + \theta)} = \frac{Ee^{-\beta\tau}}{\sin(\theta - \nu)},$$

d'où

$$AI + IM = AM = \frac{E\sin\theta}{\sin(\theta - \nu)}\left(1 - \frac{e^{-\beta\tau}\sin(\omega\tau + \theta)}{\sin\theta}\right).$$

Multipliant par AM et tenant compte de la relation donnée par le triangle AMB,

$$AM = \frac{v\sin\theta}{\sin(\theta - \nu)},$$

il vient la première des relations cherchées

$$E(1 + e^{-2\beta\tau} - 2e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau) = v\left(1 - \frac{e^{-\beta\tau}\sin(\omega\tau + \theta)}{\sin\theta}\right).$$

Passons à la détermination de i_0, en fonction de v et de τ. On a

$$\frac{OI}{\sin OMI} = \frac{OM}{\sin OIM}, \qquad \frac{AM}{\sin AOM} = \frac{AO}{\sin OMA}$$

ou

$$OI = Ee^{-\beta\tau}\frac{\sin(\omega\tau + \nu)}{\sin(\theta - \nu)},$$

$$AM = E\frac{\sin\omega\tau}{\sin(\omega\tau + \nu)},$$

d'où

$$OI.AM = E^2 e^{-\beta\tau}\frac{\sin\omega\tau}{\sin(\theta - \nu)},$$

et, en remplaçant AM par la valeur (7) et OI par $i_0\sqrt{\frac{L}{C}}$,

$$i_0\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\theta\left(1 - e^{-\beta\tau}\frac{\sin(\omega\tau + \theta)}{\sin\theta}\right) = Ee^{-\beta\tau}\sin\omega\tau.$$

Cette formule donnera le courant résiduel i_0, en fonction de la période τ du régime musical, une fois que celle-ci aura été déterminée, comme nous venons de le voir, en fonction du potentiel explosif v.

CONDITIONS DE STABILITÉ DU RÉGIME.

1° *Cas de l'éclateur fixe.* — Le condensateur étant au potentiel zéro et étant parcouru par un courant i_0, se charge sous la force électromotrice constante E, puis, lorsque son potentiel est égal à v,

Digitized by Google

valeur du potentiel explosif, le courant étant justement égal à i_0, l'étincelle part et le potentiel est ramené instantanément à zéro, puis tout recommence.

Supposons que le courant initial soit $i_0 + \delta i_0$, le courant final deviendra $i_0 + \delta i_1$. On demande la relation entre δi_0 et δi_1.

Je pose

$$A = e^{-\beta t} \frac{\sin(\omega t - \theta)}{\sin\theta},$$

et j'ai, en prenant les dérivées par rapport au temps,

$$A' = r\, e^{-\beta t} \frac{\sin \omega t}{\sin\theta},$$

$$A'' = r^2 e^{-\beta t} \frac{\sin(\omega t + \theta)}{\sin\theta},$$

$$A''' = r^3 e^{-\beta t} \frac{\sin(\omega t + 2\theta)}{\sin\theta}.$$

J'ai alors, pour $t = 0$,

$$A = -1, \qquad A' = 0, \qquad A'' = r^2,$$

et, comme A, A', A'' satisfont à l'équation différentielle, j'ai

$$q = CE + CE\,A + \frac{i_0}{r^2} A',$$

$$i = \frac{dq}{dt} = CEA' + \frac{i_0}{r^2} A'';$$

car, pour $t = 0$, on a

$$q = 0 \qquad \text{et} \qquad i = i_0.$$

Cela posé, faisons varier i_0 de δi_0, τ variera de δt, et au début de la charge suivante on aura

$$dq = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial q}{\partial t}\delta t + \frac{\partial q}{\partial i_0}\delta i_0 = 0$$

ou

$$i_0 \delta t + \frac{\delta i_0}{r^2} \cdot A' = 0, \qquad \text{et} \qquad \delta i_1 = \left(CE\,A'' + \frac{i_0}{r} A'''\right)\delta t + \frac{A''}{r^2}\delta i_0,$$

d'où, en éliminant δt,

$$\delta i_1 = -\frac{\delta i_0}{r^2}\frac{A'}{i_0}\left(CE\,A'' + \frac{i_0}{r^2} A'''\right) + \frac{A''}{r^2}\delta i_0 = \frac{\delta i_0}{r^2}\left[-\frac{A'CE\,A''}{i_0} - \frac{A'A'''}{r^2} + A''\right];$$

or on a

$$\frac{A'CE}{i_0} = 1 - \frac{A''}{r^2},$$

Digitized by Google

d'où

$$\delta i_1 = \frac{\delta i_0}{r^4}(A''^2 - A'A''').$$

On a

$$A''^2 - A'A''' = \frac{e^{-2\beta t}}{\sin^2\theta}[\sin^2(\omega t + \theta) - \sin\omega t \sin(\omega t + 2\theta)] \times r^4;$$

mais il y a lieu de tenir compte de l'identité

$$\sin^2(\omega t + \theta) - \sin\omega t \sin(\omega t + 2\theta) = \sin^2\theta.$$

Elle équivaut à une équation du second degré en tang ωt, qui est satisfaite pour $\omega t = 0$, $\omega t = -\theta$, $\omega t = -2\theta$, comme on le constate à simple vue, ce qui correspond à trois valeurs différentes de tang ωt; c'est donc une identité, et il reste

$$\delta i_1 = \delta i_0 e^{-2\beta\tau}.$$

On aurait d'une façon générale

$$\delta i_n = \delta i_{n-1} e^{-2\beta\tau},$$

et par suite

$$\lim \delta i_n = 0.$$

Le régime est stable.

Deuxième cas : l'éclateur est un éclateur tournant.

Alors la décharge se produit à des intervalles τ déterminés par le nombre de dents et la vitesse de rotation.

En ce cas on aura, puisque ici $t = \tau$ est une constante,

$$i_{n+1} = CEA' + \frac{i_n}{r^2}A''.$$

Cette formule est de la forme

$$i_{n+1} = a + b\,i_n,$$

qui a pour solution

$$i_n = \frac{a}{1-b} + b^n.$$

Or

$$b = \frac{A''}{r} = e^{-\beta\tau}\frac{\sin(\omega\tau + \theta)}{\sin\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{1-b} = i_0,$$

mais $|b| < 1$, car on a

$$\frac{db}{d\tau} = \frac{r e^{-\beta\tau}}{\sin\theta}\sin(\omega\tau + 2\theta),$$

qui s'annule pour $\omega\tau + \theta = \pi - \theta$, ce qui donne, pour maximum

Digitized by Google

de $\left|\frac{A''}{r^2}\right|$, la quantité $e^{-\beta\tau} < 1$. Donc $\lim i_n = i_0$ pour $n = \infty$. Ici encore, le régime est stable.

L'énergie fournie par la source au circuit de charge est

$$E\int_0^\tau i\,dt = E\,C\,v.$$

La puissance fournie est

$$\frac{1}{\tau}E\int_0^\tau i\,dt \equiv E\,i_{moyen}.$$

L'énergie fournie à chaque période au circuit oscillant est

$$W = \frac{1}{2}Cv^2.$$

La puissance fournie est

$$H = \frac{W}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{Cv^2}{\tau}.$$

Or v est une fonction de τ. Le maximum de H est donné par

$$\frac{dH}{d\tau} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{v}{\tau}.$$

Le rendement ρ est

$$\rho = \frac{\frac{1}{2}Cv^2}{\int_0^\tau E\,i\,dt} = \frac{1}{2}\frac{v}{E}.$$

Le maximum de ρ correspond à

$$\frac{dv}{d\tau} = 0$$

ou

$$\frac{dv}{d\tau} = 0 = Er\,\frac{\sin\omega\tau\, e^{-\beta\tau}(1 - e^{-2\beta\tau})}{\left(1 - e^{-\beta\tau}\frac{\sin(\omega\tau + \theta)}{\sin\theta}\right)^2},$$

Les minima correspondent à

$$\omega\tau = 0, \qquad 2\pi, \quad \ldots.$$

Les maxima à

$$\omega\tau = \pi, \quad 3\pi, \quad \ldots \qquad \text{ou} \qquad \tau = \frac{T}{2}, \quad \frac{3T}{2}, \quad \ldots.$$

Digitized by Google

Pour $\omega\tau = \pi$, il vient

$$\rho = \frac{1 + e^{-\beta\frac{T}{2}}}{2}.$$

DÉCHARGE OSCILLANTE DU CONDENSATEUR MAL ISOLÉ.

Soient :

i le courant de charge,
v la différence de potentiel due au courant de charge,
R, L, S, C les constantes du circuit ; S est la conductance de l'isolant.

On sait que v agit comme une force élastique ; on a donc

$$Sv + C\frac{dv}{dt} = i, \qquad Ri + L\frac{di}{dt} = -v.$$

Je mets $\mathfrak{D}$ à la place de $\frac{d}{dt}$, et je traite $\mathfrak{D}$ par le calcul symbolique, $\mathfrak{D}^2$ signifiant une dérivée seconde.

J'ai donc

$$(S + C\mathfrak{D})v = i, \qquad (R + L\mathfrak{D})i = -v,$$

d'où

$$(R + L\mathfrak{D})(S + C\mathfrak{D})v = -v,$$

équation de la forme

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\beta\frac{dv}{dt} + r^2v = 0,$$

à la condition de poser

$$2\beta = \frac{LS + CR}{CL} \qquad \text{et} \qquad r^2 = \frac{RS + 1}{CL}.$$

J'écrirai encore

$$r\cos\theta = -\beta, \qquad r\sin\theta = \omega$$

et j'aurai pour solution fondamentale

$$B = \frac{\sin\omega t}{\sin\theta}e^{-\beta t};$$

d'où, pour la solution correspondant aux données initiales i_0 et v_0,

$$i = -\frac{v_0}{Lr}B + \frac{i_0}{Cr}(SB + CB'),$$

$$v = \frac{v_0}{Lr}(RB + LB') + \frac{i_0}{Cr}B$$

Digitized by Google

avec

$$B' = \frac{dB}{dt} = r\,\frac{\sin(\omega t + \theta)}{\sin\theta}\,e^{-\beta t}.$$

Il est intéressant de considérer i et v comme des fonctions linéaires de i_0 et de v_0 et de voir ce que devient l'intégrale

$$\int\int di\,dv$$

par cette transformation. Elle devient

$$\int\int |J|\,di_0\,dv_0,$$

$|J|$ étant la valeur absolue du déterminant

$$J = \frac{1}{CLr^2}\begin{vmatrix} -B & SB + CB' \\ RB + LB' & B \end{vmatrix}.$$

On a, en développant,

$$J = \frac{(-1)}{CLr^2}[CLB'^2 + (SL + CR)BB' + (RS + 1)B^2).$$

Or, on a

$$B' = \frac{r\sin(\omega t + \theta)e^{-\beta t}}{\sin\theta},$$

d'où

$$J = \frac{(-1)e^{-2\beta t}}{CLr^2\sin^2\theta}$$
$$\times [CLr^2\sin^2(\omega t + \theta) + (SL + CR)r\sin(\omega t + \theta)\sin\omega t + (RS + 1)\sin^2\omega t].$$

La parenthèse se réduit :

Pour $t = 0$, à
$$CLr^2\sin^2\theta;$$

Pour $\omega t = -\theta$, à
$$(RS + 1)\sin^2\theta:$$

Pour $\omega t = -2\theta$, à

$$CLr^2\sin^2\theta + \sin 2\theta\,[SL + CR)r\sin\theta + (RS + 1)\sin 2\theta].$$

Mais on a

$$RS + 1 = CLr^2$$

et

$$(SL + CR)r + 2(RS + 1)\cos\theta = 0.$$

C'est donc une fonction homogène du second degré de $\sin\omega t$, $\cos\omega t$

Digitized by Google

qui prend la valeur $CLr^2\sin^2\theta$ pour trois valeurs différentes de $\tang\omega t$. Elle est donc constante et égale à $CLr^2\sin^2\theta$, et il reste

$$|J| = e^{-2\beta t}.$$

Donc un petit domaine $di\,dv$ tend vers zéro suivant une loi exponentielle. Il demeurerait constant en superficie si l'on avait $\beta = 0$, ce qui est le cas du théorème de Liouville.

I. La conductance S peut être constituée par un shunt mis à dessein sur le condensateur pour modifier la période du circuit oscillant. On a, en effet,

$$\omega^2 = r^2 - \beta^2 = \frac{RS+1}{CL} - \frac{1}{4}\left(\frac{LS+CR}{CL}\right)^2.$$

On peut profiter de S pour rendre au circuit oscillant une pseudo-période ω qui ait la même valeur que la période que ce circuit aurait si sa résistance était réduite à zéro, les autres constantes C et L ne variant pas.

On aura, en effet,

$$\omega^2 = \frac{1}{CL}$$

si l'on a

$$\frac{RS}{CL} - \frac{1}{4}\left(\frac{LS+CR}{CL}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{S}{C} - \frac{R}{L}\right)^2 = 0,$$

d'où la condition

$$S = \frac{CR}{L}.$$

II. On voit aussi qu'on peut disposer de S de façon à transformer une décharge apériodique en une décharge oscillante (Janet).

Supposons, en effet,

$$S = 0, \quad 1 - \frac{CR^2}{4L} < 0 \qquad \text{ou} \qquad 0 < \frac{R}{L} - \frac{2}{\sqrt{CL}};$$

la décharge est apériodique.

Mettons le shunt S; alors, pour que la décharge soit périodique amortie, il faut avoir

$$\frac{RS+1}{CL} - \frac{1}{4}\left(\frac{LS+CR}{CL}\right)^2 > 0 \qquad \text{ou} \qquad -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{S}{C} - \frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}\right] > 0,$$

Digitized by Google

ou

$$0 < \frac{R}{L} - \frac{2}{\sqrt{CL}} < \frac{S}{C} < \frac{R}{L} + \frac{2}{\sqrt{CL}}.$$

On voit donc qu'en ajoutant une cause nouvelle de dissipation d'énergie sous forme de chaleur par l'introduction du shunt S, on peut rendre périodique amortie une décharge qui, autrement, se présentait comme apériodique, résultat d'apparence paradoxale.

CHARGE DU CONDUCTEUR SOUS FORCE ÉLECTROMOTRICE PÉRIODIQUE SIMPLE.

Nous venons d'étudier la décharge oscillante du condensateur laissé à lui-même. Introduisons dans le circuit une force électromotrice. Comptons les forces électromotrices comme positives, quand elles tendent à produire un courant dirigé dans le sens positif du courant. Soit

$$E \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

la force électromotrice périodique simple agissant sur le circuit; les équations du mouvement de l'électricité sont celles du cas précédent complétées par l'introduction de ce terme, et l'on a

$$(S + C\mathfrak{D})v = i, \qquad (R + L\mathfrak{D})i = E \sin(\omega_1 t + \varphi) - v,$$

d'où

$$(S + C\mathfrak{D})(R + L\mathfrak{D})i + i = (S + C\mathfrak{D})E \sin(\omega_1 t + \varphi),$$

et l'équation caractéristique est toujours

$$(S + Cx)(R + Lx) + 1 = 0.$$

La solution obtenue quand E est nul sera dite la *solution des équations sans second membre;* cette solution, que j'appelle (i', v'), est donnée par les formules du paragraphe précédent; la solution générale (i, v) s'obtiendra en ajoutant à la solution (i', v') une solution particulière du système avec second membre; on peut choisir, pour cette solution particulière, la solution isochrone; elle est caractérisée par ce fait qu'elle est en même temps la solution asymptotique, vers laquelle tend toute solution, quand le temps croît indéfiniment; elle est indépendante des conditions initiales et c'est elle qu'on obtiendrait si l'on se donnait pour conditions initiales $i_0 = 0$, $v_0 = 0$, dans la solution de l'équation sans second membre. Pour avoir cette solution isochrone, j'essaie l'expression suivante, où E_0 et ψ

Digitized by Google

sont deux indéterminées

$$v'' = E_0 \sin(\omega_1 t + \varphi + \psi).$$

Je porte dans l'équation en v et j'obtiens

$$E_0[(RS + 1 - LC\omega_1^2)\sin(\omega_1 t + \varphi + \psi) + (LS + CR)\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi + \psi)] = E \sin(\omega_1 t + \varphi).$$

Je détermine alors les deux quantités Z et ψ par les équations

$$(a) \qquad RS + 1 - LC\omega_1^2 = Z\cos\psi, \qquad (LS + CR)\omega_1 = -Z\sin\psi,$$

et il vient

$$(b) \qquad E_0 Z \sin(\omega_1 t + \varphi + \psi - \psi) = E\sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad \text{ou} \qquad E_0 = \frac{E}{Z},$$

ce qui détermine E_0. La valeur de i correspondante i'' sera donnée par

$$i'' = (S + C\mathfrak{D})v''$$

et la solution générale sera

$$i = i' + i'', \qquad v = v' + v''.$$

$E_0 Z$ et ψ ont été déterminées par les équations (a) et (b). Pour $t = 0$, on a

$$v_0'' = E_0 \sin(\varphi + \psi), \qquad i_0'' = S v_0'' + C\omega E_0 \cos(\varphi + \psi).$$

Si donc, au temps $t = 0$, on doit avoir

$$i = i_0, \qquad v = v_0,$$

il faudra choisir pour conditions initiales i_0', v_0' de l'équation sans second membre

$$i_0' = i_0 - i_0'', \qquad v_0' = v_0 - v_0''.$$

Portons notre attention sur la solution (v'', i''). On a

$$v'' = \frac{E}{Z}\sin(\omega_1 t + \varphi + \psi),$$

$$i'' = S v'' + C\frac{dv''}{dt} = \frac{E}{Z}[S\sin(\omega_1 t + \varphi + \psi) + C\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi + \psi)]$$

Je pose

$$S = \sqrt{S^2 + C^2\omega_1^2}\cos\alpha, \qquad C\omega_1 = \sqrt{S^2 + C^2\omega_1^2}\sin\alpha,$$

d'où

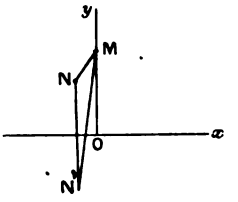
$$i'' = E\frac{\sqrt{S^2 + C^2\omega_1^2}}{Z}\sin(\omega_1 t + \varphi + \psi + \alpha).$$

Digitized by Google

Le courant est en avance de l'angle α sur la différence de potentiel aux bornes du condensateur.

Premier problème. — Pour quelle valeur de ω_1, v''_{eff} est-il maximum ?

Fig. 59.



Il y a lieu, pour répondre à cette question, d'étudier la variation de Z, qui est le module de

$$CL(\omega\sqrt{-1})^2 + (LS + CR)\omega\sqrt{-1} + RS + 1.$$

Les racines de l'équation caractéristique étant $-\beta \pm \omega\sqrt{-1}$, on a

$$Z = \text{mod}\, CL\,(\omega_1\sqrt{-1} + \beta - \omega\sqrt{-1})\,(\omega_1\sqrt{-1} + \beta + \omega\sqrt{-1}).$$

Soient N, N' les affixes de $-\beta \pm \omega\sqrt{-1}$ et M l'affixe de $\omega_1\sqrt{-1}$; on a

$$Z = CL \times gr\,MN \times gr\,MN';$$

or, on a

$$\frac{1}{2}\,gr\,MN\,gr\,MN'\sin NMN' = surf\,MNN' = surf\,ONN' = \omega\beta,$$

d'où

$$Z = 2\omega\beta\,CL \times \frac{1}{\sin NMN'}.$$

Donc Z va en croissant constamment lorsque ω_1 croît indéfiniment. La valeur minimum de Z correspondrait à $\omega_1 = 0$ et l'on aurait alors

$$Z = CL(\beta^2 + \omega^2) = RS + 1.$$

Deuxième problème. — Pour quelle valeur de ω_1, i''_{eff} est-il maximum ?

Il faut étudier la fonction

$$y = \frac{S^2 + C^2\omega_1^2}{(RS + 1 - LC\omega_1^2)^2 + (LS + CR)^2\omega_1^2}.$$

Digitized by Google

Si je pose $\omega_1 = x$, la fonction y est en x une fonction rationnelle du second degré, qui s'annule pour $x = -\frac{S^2}{C^2}$, devient positive et reste finie, puis s'annule pour x infini. Elle passe donc dans l'intervalle par un maximum. Comme elle est croissante pour $x = -\frac{S^2}{C^2}$, elle atteindra donc tout d'abord ce maximum. D'ailleurs, elle décroîtra ensuite constamment, car une fonction de ce genre ne peut avoir qu'un maximum et un minimum, et ici la fonction ne peut, après son maximum, passer par un minimum, puisque, après ce minimum, il lui faudrait décroître jusqu'à zéro. Donc nous avons un maximum entre $-\frac{S^2}{C^2}$ et $+\infty$. Ce maximum se produira pour une valeur admissible de x si la valeur correspondante de x est positive. Il faut donc que l'équation $y' = 0$ ait une racine positive et une seule. Or on a, pour $y' = 0$, l'équation

$$\begin{aligned} &C^2[(RS+1-LCx)^2+(LS+CR)^2x] \\ &-(S^2+C^2x)[2LC(LCx-RS-1)+(LS+CR)^2] = 0. \end{aligned}$$

Pour $x = +\infty$, le résultat de la substitution dans le premier membre de cette équation est négatif, c'est $-L^2C^4$. Il y aura donc une racine positive et une seule si, pour $x = 0$, on a le signe $+$ pour résultat de la substitution; ce résultat est

$$C^2(RS+1)^2 - S^2[(LS+CR)^2 - 2LC(RS+1)].$$

Remplaçons $\frac{RS+1}{CL}$ par $\beta^2+\omega^2$ et $\frac{LS+CR}{CL}$ par 2β, il vient

$$C^2L^2\{C^2(\beta^2+\omega^2) - S^2[4\beta^2 - 2(\beta^2+\omega^2)]\}$$

ou

$$C^2L^2[C^2(\beta^2+\omega^2) + 2S^2(\omega^2-\beta^2)].$$

Comme β est toujours une très petite quantité vis-à-vis de ω, le résultat sera positif. Si l'on avait $\omega < \beta$, il faudrait qu'on eût

$$S^2 < \frac{1}{2}C^2\frac{\beta^2+\omega^2}{\beta^2-\omega^2}.$$

Dans le cas où S est nul, la discussion se simplifie, car il vient

$$y = \frac{C^2\omega_1^2}{(1-LC\omega_1^2)^2 + C^2R^2\omega_1^2} = \frac{1}{R^2 + \left(L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}\right)^2},$$

Digitized by Google

de sorte que y est maximum quand la réactance

$$L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}$$

s'annule. On dit qu'on est alors à la résonance.

Il vient alors

$$Z = CR\omega_1 \qquad \text{et} \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2};$$

d'où

$$v'' = \frac{E}{CR\omega_1}\sin\left(\omega_1 t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$i'' = \frac{E}{R}\sin(\omega_1 t + \varphi).$$

Le courant est en phase, la différence de potentiel est en quadrature.

D'une façon générale, on a

$$Z = CL\sqrt{\beta^2 + (\omega - \omega_1)^2}\sqrt{\beta^2 + (\omega + \omega_1)^2}$$

et

$$v'' = \frac{E}{Z}\sin(\omega_1 t + \varphi + \psi).$$

On voit que le cas où l'on a $\omega = \omega_1$ n'est pas celui qu'on appelle *cas de la résonance*, c'est au contraire quand on a

$$\omega_1^2 = \omega^2 + \beta^2$$

si S est nul, et pour une valeur moins simple, si S n'est pas nul, qu'on a le maximum de i_{eff}. Dans le cas où l'on aurait $\omega_1 = \omega$, il resterait

$$v'' = \frac{E}{CL\beta\sqrt{\beta^2 + 4\omega^2}}\sin(\omega_1 t + \varphi + \psi) \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{tang}\psi = -\frac{\beta}{2\omega}.$$

Cette valeur de ω_1 ne correspondrait pas à un maximum des quantités utiles à envisager. La résonance ici doit donc s'apprécier soit à la lecture de l'ampéremètre thermique, soit à celle du phasemètre, mais non d'après l'accord de la période ω_1 avec la pseudo-période ω. Cependant, si S est nul et β petit, ω_1 ne différera pas beaucoup de ω à la résonance.

Le coefficient $s = \frac{1}{Z}$ par lequel il faut multiplier la tension maxima E de la source pour avoir la tension maxima aux bornes du

Digitized by Google

condensateur est appelé *coefficient de surtension*. On a donc

$$s = \frac{1}{Z} = \frac{1}{CL}\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + (\omega - \omega_1)^2}\sqrt{\beta^2 + (\omega + \omega_1)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{L^2C^2\omega_1^4 + [(LS - CR)^2 - 2LC]\omega_1^2 + (RS + 1)^2}}.$$

Si l'on a $S = 0$, il reste

$$s = \frac{1}{\sqrt{L^2C^2\omega_1^4 - 2LC\omega_1^2 + 1 + C^2R^2\omega_1^2}},$$

et si la réactance est nulle, s devient

$$s = \frac{1}{RC\omega_1} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

On voit que, si la résistance et la capacité sont faibles par rapport à l'inductance, la surtension peut être considérable dans le cas de la résonance. Dans le cas où il y a une pseudo-période, on doit avoir

$$1 - \frac{CR^2}{4L} > 0 \quad \text{ou} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

autrement la charge serait apériodique. La plus petite valeur possible de s, lorsque R variera, sera donc $\frac{1}{2}$. Si R tend vers zéro, il n'y a pas de limite supérieure au coefficient de surtension.

Je supposerai maintenant que les conditions initiales sont telles qu'à l'époque $t = 0$, le condensateur soit au repos.

On aura donc

$$i = 0 \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Il suffit d'avoir

$$v = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = 0,$$

car l'on a

$$i = (S + C\Phi)v,$$

ce qui entraînera

$$i = 0$$

La courbe de v en fonction de t sera donc tangente à l'origine à l'axe des temps.

Et la solution sera

$$(\alpha) \qquad \frac{v}{E_0} = -\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\, e^{-\beta t}\sin\chi + (1 - e^{-\beta t})\sin(\omega t + \chi),$$

Digitized by Google

en posant

$$\varphi + \psi = \chi.$$

Le développement en série suivant les puissances croissantes de t montre que l'on a bien

$$v = 0, \quad \mathfrak{D} v = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Cette expression dépend de χ, qui, suivant les circonstances, prendra telle ou telle valeur.

Mais, de toute façon, la courbe (v, t) sera comprise entre les courbes enveloppes, obtenues par l'élimination de χ entre $\frac{dv}{d\chi} = 0$ et l'équation (a) de la courbe (v, t). On a

$$(a') \qquad \frac{dv}{d\chi} = 0 = -\frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \, e^{-\beta t} \times \cos\chi + (1 - e^{-\beta t}) \cos(\omega t + \chi),$$

d'où, en combinant les équations (a) et (a'),

$$\frac{v\sqrt{-1}}{E_0} = -\frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \, e^{-\beta t} \times e^{\sqrt{-1}} + (1 - e^{-\beta t}) \, e^{(\omega t + \chi)\sqrt{-1}},$$

ce que j'écrirai géométriquement

$$OA = BA + OB$$

avec

$$OA = \frac{v\sqrt{-1}}{E_0}, \qquad OB = (1 - e^{\beta t}) \times e^{(\omega t_1 + \chi)\sqrt{-1}},$$

$$AB = -\frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \, e^{-\beta t} \times e^{(+\chi)\sqrt{-1}},$$

et j'aurai les relations indépendantes de χ :

$$\pm (\mathrm{gr\,OB} - \mathrm{gr\,BA}) \leqq \mathrm{gr\,OA} \leqq \mathrm{gr\,OB} + \mathrm{gr\,BA}.$$

Le maximum de grandeur AB s'obtient pour $\sin(\omega t + \theta) = 0$ ou $t = \frac{\pi - \theta}{\omega}$ et il a pour valeur

$$\frac{\beta}{\omega} \times \sin\theta \times e^{-\beta \frac{\pi - \theta}{\omega}}.$$

Le maximum de grandeur OB entre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{\omega}$ s'obtient pour $t = \frac{\pi}{\omega}$ et a pour valeur

$$\left(1 - e^{-\beta \frac{\pi}{\omega}}\right).$$

Digitized by Google

Donc gr OA ou $\left|\frac{v}{E_0}\right|$ a pour maximum, entre o et $\omega t = \pi$, une quantité inférieure à

$$1 - e^{-\beta\frac{\pi}{\omega}} + \frac{\beta}{\omega}\sin 0\, e^{-\beta\frac{\pi-\theta}{\omega}}.$$

La courbe enveloppe peut être transformée comme nous avons transformé les courbes du mouvement amorti, dans l'étude des équations réduites; on avait posé

$$\frac{v}{E_0} = \xi, \qquad t = 2\pi\tau\sqrt{1-\beta_0^2}, \qquad \beta = 2\pi\beta_0.$$

On aura alors une équation réduite entre ζ et τ, ne dépendant plus que de β_0. On pourra donc tracer le réseau des courbes enveloppes.

La courbe (C) est la courbe

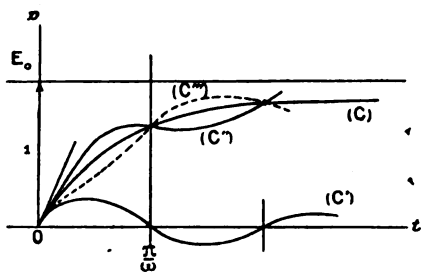
$$y_1 = 1 - e^{-\beta t}.$$

La courbe (C') est la courbe

$$y_2 = \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\, e^{-\beta t},$$

et les courbes (C''), (C''') sont les courbes $y = y_1 \pm y_2$ entre lesquelles passe la courbe enveloppe. Il y aurait lieu aussi de figurer les

Fig. 60.



courbes symétriques de (C'') et (C''') par rapport à l'axe des temps, et la courbe $\left(\frac{v}{E_0}\right)$ s'inscrit entre les deux branches de l'enveloppe qu'elle vient toucher successivement.

Si nous supposons S = o, on aura pour valeur de i correspondant

Digitized by Google

à celle de v

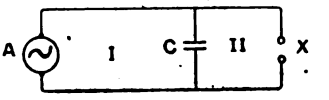
$$\frac{i}{CE_0} = \omega \cos(\omega t + \chi) - r\left[\frac{\beta}{\omega}\sin\chi \sin(\omega t + \theta) + \sin(\omega t + \chi + \theta)\right] e^{-\beta t},$$

et comme alors on a $i = C\frac{dv}{dt}$, entre deux zéros consécutifs de v, il y aura un zéro de i, conformément au théorème de Rolle.

RÉGIME MUSICAL.

L'alternateur A charge le condensateur C, puis, lorsque la différence de potentiel aux bornes du condensateur, et par conséquent de l'éclateur X, a atteint une valeur suffisamment élevée, l'étincelle éclate.

Fig. 61.



Le circuit (I) de l'alternateur et du condensateur est le circuit de charge. Le circuit (II) du condensateur et de l'éclateur est le circuit oscillant.

La période de l'alternateur est en général amenée à une valeur voisine de la pseudo-période propre du circuit (I); la fréquence peut être basse : elle est alors de 50 à la seconde ou musicale, et de 500 ou 1000 à la seconde.

Lorsqu'une étincelle éclate en X, il se produit dans le circuit (II) des oscillations dont la fréquence est beaucoup plus considérable. Si, par exemple, la longueur d'onde λ sur laquelle on travaille est de 1000^m, la formule

$$\lambda = VT,$$

où V désigne la vitesse de propagation des ondulations électriques dont la valeur est de 300000 km : sec et T la période, c'est-à-dire l'inverse de la fréquence f, montre que l'on a

$$f = 300000.$$

Pour une longueur d'onde très grande, de 10000^m, on aurait une fréquence de 30000 à la seconde.

L'éclateur X peut être un éclateur dont les parties en regard sont

Digitized by Google

fixes, alors l'étincelle éclatera quand le potentiel v aura atteint une valeur déterminée. On aura soin de souffler énergiquement l'étincelle et de renouveler les surfaces.

L'éclateur peut aussi être un éclateur tournant. Alors l'étincelle se produit quand la distance se rapproche suffisamment entre la partie fixe et la dent mobile de l'éclateur. La rotation de l'éclateur opère le soufflage et l'extinction de l'étincelle est facilitée par l'accroissement des distances qu'amène la rotation.

Mais le caractère de l'étincelle dépend du calage de l'éclateur sur l'arbre de l'induit, ou de la position relative de l'électrode fixe et du champ inducteur.

On doit rechercher un régime périodique permanent stable. Quand il est obtenu, pour une position convenable de l'électrode fixe, le son d'étincelle devient harmonique, manifestant ainsi la périodicité régulière du phénomène et l'on dit qu'on a le régime musical.

Les oscillations engendrées dans le circuit oscillant agissent par voie d'induction ou tout autre mode de couplage sur un troisième circuit. Ce circuit d'utilisation (III) est généralement constitué par une antenne avec sa prise de terre. La forme géométrique de ce circuit lui permet de rayonner de l'énergie. C'est cette énergie rayonnante dont une minime partie ira au loin impressionner l'antenne du poste récepteur.

Pour le moment, je chercherai les conditions d'établissement du régime musical, en faisant deux hypothèses :

La première, c'est que l'étincelle décharge instantanément le condensateur, de sorte qu'aussitôt après on a $v = 0$;

La seconde, c'est que, pendant cette durée, l'énergie électromagnétique d'inertie $\frac{1}{2} L i^2$ n'ait pas eu le temps de varier, de sorte que le courant initial i_0, aussitôt après une décharge, n'est autre que le courant i_0 qui circulait dans le circuit de charge au moment où la différence de potentiel du condensateur a été brusquement ramenée au zéro.

Pour faire cette étude, je trouve commode de donner une forme nouvelle à la solution.

Les équations du mouvement de l'électricité dans le circuit de charge sont

$$(R + C\Phi)\, v = i,$$
$$(R + L\Phi)\, i = -v + E \sin(\omega_1 t + \varphi).$$

Digitized by Google

Nous avons donné précédemment à la solution isochrone la forme

$$v = \frac{E}{Z}\sin(\omega_1 t + \chi).$$

Je pose

$$S = Z_1\cos\alpha, \qquad C\omega_1 = Z_1\sin\alpha, \qquad Z_1 = \sqrt{S^2 + C^2\omega_1^2};$$

la solution isochrone pour le courant est

$$i = E\frac{Z_1}{Z}\sin(\omega_1 t + \chi + \alpha).$$

Je pose encore, les accents signifiant une dérivation par rapport au temps,

$$B = e^{-\beta t}\frac{\sin(\omega t - \theta)}{\sin\theta}, \qquad B' = re^{-\beta t}\frac{\sin\omega t}{\sin\theta}, \qquad B'' = r^2 e^{-\beta t}\frac{\sin(\omega t + \theta)}{\sin\theta};$$

la solution générale aura la forme

$$v = \frac{E}{Z}\sin(\omega_1 t + \chi) + MB + NB',$$

les constantes M et N étant à déterminer par les conditions initiales.

Je ferai maintenant trois simplifications :

1° Le condensateur n'est pas shunté; on a donc

$$S = 0 \qquad \text{et} \qquad i = C\frac{dv}{dt}.$$

2° On est dans le voisinage de la résonance et l'on a

$$\omega_1 = \omega.$$

Si l'on était à la résonance même, la réactance $L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}$ serait nulle et l'on aurait

$$\omega_1 = r = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}.$$

Mais nous admettons que β est petit vis-à-vis de ω.

3° Les conditions initiales sont

$$v = 0, \qquad i = 0.$$

Dans le cas où je me place, j'aurai donc évidemment

$$v = \frac{E}{Z}\left[\sin(\omega t + \chi) + B\sin\chi - \frac{\omega}{r^2}B'\cos\chi\right],$$

Digitized by Google

comme il est facile de le vérifier en faisant $t = 0$ dans l'expression de v et dans celle de i qui est

$$i = \frac{CE}{Z}\left[\omega\cos(\omega t + \chi) + B'\sin\chi - \frac{\omega}{r^2}B'\cos\chi\right],$$

et tenant compte des valeurs de B, B′ et B″, pour $t = 0$, savoir:

$$B = -1, \qquad B' = 0, \qquad B'' = r^2.$$

Il y a lieu d'exprimer i en fonction de B et de B′ seulement en faisant l'élimination de B″ au moyen de la relation fondamentale

$$B'' + 2\beta B' + r^2 B = 0.$$

Il vient ainsi

$$i = \frac{CE}{Z}\left[\omega\cos(\omega t + \chi) + \omega\cos\chi B - \left(\sin\chi + \frac{2\beta\omega}{r^2}\cos\chi\right)B'\right].$$

Je ferai d'ailleurs usage, au cours des calculs qui vont suivre, des deux relations

$$\beta = -r\cos\theta, \qquad \omega = r\sin\theta.$$

Maintenant, pour le régime musical, si τ est l'époque à laquelle éclate l'étincelle, il faut avoir

$$i = 0, \qquad \text{ou}$$

$$(1) \qquad \omega\cos(\omega\tau + \chi) + B'\sin\chi + \left(\omega B + \frac{2\beta\omega}{r^2}B'\right)\cos\chi = 0.$$

D'autre part, v est alors maximum, mais ce maximum dépend de χ; or il y a intérêt à emmagasiner avant la décharge la plus grande quantité possible d'énergie dans le condensateur, mais ce maximum est compris à l'intérieur des courbes enveloppes des courbes particulières qui donnent v en fonction de t pour les diverses valeurs de φ. Il y a donc avantage à se placer dans l'hypothèse de l'étincelle la plus nourrie, c'est-à-dire à supposer

$$\frac{dv}{d\chi} = 0, \qquad \text{ou}$$

$$(2) \qquad \cos(\omega\tau + \chi) + \frac{\omega}{r^2}B'\sin\chi + B\cos\chi = 0.$$

On a d'ailleurs

$$(3) \qquad \cos(\omega\tau + \chi) + \sin\omega\tau\sin\chi - \cos\omega\tau\cos\chi = 0.$$

Digitized by Google

Éliminons γ entre (1), (2) et (3), il vient

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \omega & B' & \omega B + \frac{2\beta\omega}{r^2} B' \\ 1 & \frac{\omega}{r^2} B' & B \\ 1 & \sin\omega\tau & -\cos\omega\tau \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant (4) peut se simplifier, en retranchant des éléments de la dernière colonne ceux de la première multipliés par B, puis en retranchant des éléments de la première ligne ceux de la seconde multipliés par ω; il vient ainsi

$$B' \begin{vmatrix} 0 & 1 - \frac{\omega^2}{r^2} & 2\frac{\beta\omega}{r^2} \\ 1 & \frac{\omega}{r^2} B' & 0 \\ 1 & \sin\omega\tau & -\cos\omega\tau - B \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$B'\left[2\frac{\beta\omega}{r^2}\sin\omega\tau - 2\frac{\beta\omega}{r^2}\frac{\omega}{r^2}B' + (\cos\omega\tau + B)\left(1 - \frac{\omega^2}{r^2}\right)\right] = 0,$$

ou

$$\frac{2e^{\beta\tau}\sin\omega\tau}{\sin\theta}\Big[-2\sin\theta\cos\theta\sin\omega\tau - 2\sin\theta\cos\theta\, e^{-\beta\tau}\sin\omega\tau + \left(\cos\omega\tau + \frac{e^{\beta\tau}\sin(\omega\tau-\theta)}{\sin\theta}\right)\cos^2\theta\Big] = 0,$$

ou

$$(5)\qquad \sin\omega\tau\left(\frac{e^{\beta\tau}}{\sin\theta} - \frac{2\sin\theta\sin\omega\tau - \cos\omega\tau\cos\theta}{\cos\theta\sin(\omega\tau-\theta) - 2\sin^2\theta\sin\omega\tau}\right) = 0.$$

Mais il ne suffit pas, pour que le régime périodique soit obtenu, que la condition initiale $i = 0$ se retrouve; il faut encore que la force électromotrice se retrouve dans les mêmes conditions qu'au temps $t = 0$; on devra donc avoir

$$(6)\qquad E\sin\varphi = \pm E\sin(\omega\tau + \varphi),$$

le signe $\pm$ signifiant qu'il est indifférent que l'étincelle corresponde à un courant dirigé dans un sens ou dans l'autre.

On pourra donc avoir, pour satisfaire cette condition :

$$(7)\qquad \omega\tau = k\pi \quad \text{ou} \quad \omega\tau = k\pi - 2\varphi.$$

Digitized by Google

Si la parenthèse de l'équation (5) s'annule pour la valeur de τ déduite de la seconde des équations (7), on aura une fréquence musicale particulière possible.

Mais, d'une façon générale, on s'arrangera pour avoir

$$\omega\tau = 4\pi \qquad \text{ou} \qquad \omega = 2 \times \frac{2\pi}{\tau}, \tag{8}$$

de sorte que la pulsation de la machine sera le double de la pulsation du régime musical d'étincelles, et qu'un alternateur de fréquence 1000 donnera le son 500. Alors la valeur (8) de la fréquence musicale $\frac{1}{\tau}$ satisfera en même temps aux équations (5) et (6). L'équation (2) se réduira à

$$\cos\chi + B\cos\chi = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \cos\chi = 0 \quad \text{et} \quad |\sin\chi| = 1.$$

L'expression de v donnera alors, pour $t = \tau$,

$$v = \frac{E}{Z}(\sin\chi + B\sin\chi)$$

ou

$$|v| = \frac{E}{Z}(1 - e^{-\beta\frac{4\pi}{\omega}}).$$

Telle sera la valeur du potentiel explosif.

Matériellement, on agira sur la position de l'électrode fixe, ce qui réglera le décalage et la distance, en même temps que l'oreille indiquera si le son est pur, et que la lecture de l'ampèremètre d'antenne renseignera sur l'énergie utile.

Comme on a supposé

$$\omega_1 = \omega,$$

il vient

$$Z = CL\beta\sqrt{\beta^2 + \omega^2}.$$

Ce n'est que si β est très petit qu'on aura sensiblement

$$\frac{1}{Z} = CR\omega = s,$$

s étant le coefficient de surtension.

Quant aux valeurs de v et de i, si l'on fait, par exemple, $\chi = \frac{\pi}{2}$,

Digitized by Google

on aura

$$v = Es\left(\cos\omega t + e^{-\beta t}\frac{\sin(\omega t - \theta)}{\sin\theta}\right),$$

$$i = \frac{E}{r}\sin\omega t\left(-1 + \frac{e^{-\beta t}}{\sin^2\theta}\right).$$

Le point de la courbe v correspondant au potentiel explosif se trouvant sur l'enveloppe, c'est-à-dire à un croisement de plusieurs courbes particulières infiniment voisines, le régime aura une assez grande stabilité.

Digitized by Google

CHAPITRE XIX.

GÉNÉRATION DES OSCILLATIONS ENTRETENUES.

La condition nécessaire et suffisante pour que des oscillations entretenues puissent se produire dans un système au repos qui n'est soumis qu'à des forces électromotrices constantes est difficile à déterminer.

Le problème semble avoir été résolu par des physiciens américains dont les travaux ont été exposés dans la *Physical Review*.

Les notes que l'on pourra lire ci-après ont moins pour objet de donner la solution que de montrer les difficultés de l'obtenir.

Pour que des oscillations entretenues subsistent dans un système, il faut qu'elles correspondent à un régime stable ne dépendant que de l'état du système ou de ses variations périodiques, mais invariable quand on ne change que dans certaines limites les conditions initiales qui y ont donné naissance. Il en résulte que le régime périodique permanent se présente comme une solution asymptotique pour t infini.

Il est clair, dans ces conditions, qu'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants ne saurait donner la solution du problème, parce que les constantes arbitraires y entrent d'une façon linéaire et homogène, et que les seconds membres sont supposés non périodiques.

Il faut donc admettre que les coefficients ne sont pas constants ou que les équations différentielles ne sont pas linéaires.

J'applique ces considérations au régime de l'arc chantant.

Je m'abstiens pour le moment d'étudier les montages de lampes à trois électrodes génératrices d'oscillations.

ÉTUDE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE L'ÉLECTRICITÉ.

Il y a certains caractères généraux qui méritent d'être relevés, parce qu'ils sont vrais, en particulier, quel que soit le nombre de

Digitized by Google

variables du système, et qui doivent subsister, même si le nombre de ces variables devient infini. Par exemple, les équations resteront linéaires, elles continueront à être à coefficients constants, ces coefficients demeureront réels quel que soit le nombre des variables. Ces caractères sont donc communs à un très grand nombre de problèmes de physique mathématique.

1° *Principe de supposition.* — Soient e les forces électromotrices données; q_0, q'_0 les données initiales; q, q' la solution correspondante. Soient maintenant E les forces électromotrices données; Q_0, Q'_0 les données initiales; Q, Q′ la solution correspondante.

Alors $Q + q$, $Q' + q'$ sera la solution correspondant aux forces électromotrices données $E + e$, les conditions initiales étant $Q_0 + q_0$, $Q'_0 + q'_0$.

L'importance de ce théorème, c'est qu'avec des solutions élémentaires on peut former des solutions complexes, donnant la possibilité de satisfaire à des conditions initiales de plus en plus compliquées.

2° *Séparation des parties réelles et des parties imaginaires.* — Supposons que la force électromotrice donnée soit de la forme

$$e_r = \sqrt{2}\, e_{\text{eff}} \sin(\omega t - \varphi).$$

Cherchons tout d'abord la solution correspondant à la force électromotrice

$$e = \sqrt{2}\, e_{\text{eff}} \exp.(\omega t - \varphi)\sqrt{-1}.$$

La solution correspondant à e_r sera la partie affectée du coefficient $\sqrt{-1}$ dans la solution obtenue pour e.

3° *Forme de la solution de l'équation sans second membre.* — Si les forces électromotrices sont nulles, la solution des équations sans second membre est

$$\Sigma A e^{\alpha t}$$

pour chaque variable considérée, α étant racine de l'équation caractéristique. Ce caractère persiste même lorsque les racines sont en nombre infini.

4° *Données initiales.* — Un des avantages du procédé d'exposition

Digitized by Google

que nous avons adopté consiste dans l'assimilation du problème électrique à un problème ordinaire de mécanique. Il en résulte qu'il n'y a aucun doute sur les conditions initiales que l'on a à se poser. Il faut se donner les valeurs initiales des q et des q', et tout le mouvement ultérieur du système s'en déduira. Nous pouvons supposer que les coefficients des équations de Lagrange, au lieu d'être constants, sont des fonctions données du temps. On a alors affaire à des équations différentielles linéaires. L'élimination de toutes les variables, en fonction de l'une d'elles, conduira à une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n.

Or la solution générale d'une pareille équation est de la forme

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n,$$

où x_1, x_2, ..., x_n représentent n solutions particulières dont on démontre l'existence, et où C_1, C_2, ..., C_n sont n constantes arbitraires qui seront déterminées par les valeurs initiales de x et de ses $n-1$ premières dérivées, ou, ce qui revient au même, par les valeurs initiales des q et des q'. Et il y a lieu de remarquer que les valeurs initiales (q_0 et q'_0, etc.) entreront linéairement dans les expressions des C qui en sont des fonctions linéaires et homogènes. Il ne pourra donc y avoir encore dans ce cas, en général, d'oscillations entretenues; il faudrait que la solution ne dépendît pas des constantes.

5° *Recherche des solutions périodiques.* — Le problème d'intégration étant résolu, si l'indice zéro caractérise les valeurs initiales des variables et de leurs dérivées pour $t = 0$, on aura

$$\begin{aligned} x &= f_1(x_0 y_0 z_0 x'_0 y'_0 z'_0 t), \quad & y &= g_1(x_0 \ldots t), \quad & z &= h_1(x_0 \ldots t), \\ x' &= f'_2(x_0 y_0 z_0 x'_0 y'_0 z'_0 t), \quad & y' &= g_2(x_0 \ldots t), \quad & z' &= h_2(x_0 \ldots t). \end{aligned}$$

Ces équations sont vérifiées identiquement pour $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $x' = x'_0$, $y' = y'_0$, $z' = z'_0$. Pour que le système repasse au temps t par le même état d'où il est parti, il faut qu'on ait (x, y, z étant en nombre n) les $2n$ équations analogues à l'équation

$$f_1(x_0 y_0 z_0 x'_0 y'_0 z'_0 t) = f_1(x_0 y_0 z_0 x'_0 y'_0 z'_0 t).$$

Supprimons la solution évidente $t = 0$, il viendra une certaine équation :

$$F_1(x_0 y_0 z_0 x'_0 y'_0 z'_0 t) = 0.$$

Digitized by Google

Nous aurons $2n$ équations analogues. Entre ces équations, on pourra éliminer $2n - 1$ variables et il restera une équation entre x_0 et t, laquelle devra être satisfaite pour une valeur déterminée du temps de révolution t, quel que soit le point initial x_0 d'où le mouvement périodique ait été censé partir. En écrivant que cette équation de condition est indépendante de x_0, on trouvera diverses relations qui devront être satisfaites par une même valeur τ de t, sinon le problème est impossible.

Dans le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants, si une racine de l'équation caractéristique est purement imaginaire, il lui correspondra une solution périodique.

6° *Amortissement et période.* — La plupart des systèmes de conducteurs de la téléphonie ou de la télégraphie sans fil pourront être considérés comme des systèmes matériels à un nombre infini de variables, dérivés des réseaux analogues à ceux dont nous faisons la théorie. La solution conservera donc les mêmes caractères généraux. A l'équation caractéristique algébrique correspondra une équation transcendante ayant un nombre infini de racines. Chacune de celles-ci sera de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$; à b correspondra une fréquence propre d'oscillation, et à a, dont la valeur sera généralement négative, correspondra un amortissement de telle sorte qu'à chaque période est associé un amortissement particulier. Ces valeurs a et b sont des fonctions des coefficients de l'équation caractéristique, c'est-à-dire des coefficients des énergies T et W (et aussi J), lesquels sont déterminés par la forme géométrique et les constantes physiques (ε, μ, ρ, pouvoir inducteur électrique, perméabilité, résistivité). Le choix à faire sera donc guidé par la condition d'associer à une certaine fréquence, en général, le plus petit amortissement possible, de façon à faciliter les phénomènes de résonance.

7° *Oscillations entretenues.* — Plaçons-nous dans le cas où il n'y a pas de force électro motrice variable. Pour que des oscillations soient engendrées spontanément et s'entretiennent, il ne suffit pas que l'on ait un mouvement périodique, il faut encore que ce mouvement soit stable.

Cela aura lieu si l'on peut tracer autour de chaque valeur initiale d'une des variables un petit domaine, tel que si les conditions initiales

Digitized by Google

sont changées, mais de façon que les modifications éprouvées ne les fassent pas sortir des domaines assignés, le mouvement tende, au bout d'un temps fini ou infini, à redevenir identique au mouvement périodique primitif.

Exemple : Considérons l'équation du pendule ou des oscillations électriques dans un circuit ayant self-inductance, capacité, mais pas de résistance.

On a

$$y'' = -y \tag{1}$$

et l'intégrale des forces vives donne

$$\frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}y^2 = \text{const.}$$

ou

$$y'^2 + y^2 = y_0'^2 + y_0^2. \tag{2}$$

Le point figuratif $X = y$ $Y = y'$ décrit donc le cercle

$$X^2 - Y^2 = \text{const.}$$

et à cette courbe fermée correspond un mouvement périodique.

Mais ce mouvement périodique n'est pas un régime, car si les données initiales deviennent y_1 y_1', le point figuratif se déplacera sur la courbe

$$X^2 + Y^2 = y_1'^2 + y_1^2 \tag{3}$$

et n'aura aucune tendance à revenir sur le cercle (2). On a un régime périodique accidentel, non un régime périodique stable.

8° *État asymptotique.* — Nous pouvons chercher l'état du système au bout d'un temps infini. Nous avons déjà vu à l'occasion d'un problème particulier, et il serait facile de généraliser la solution, que les parties réelles des racines de l'équation caractéristique sont forcément négatives; cela résulte de ce qu'on a

$$dT + dW = -\Sigma R i^2 dt.$$

Ces quantités T et W ne peuvent aller en croissant indéfiniment, alors que toutes deux sont essentiellement positives et que leur somme décroît sans cesse.

Digitized by Google

Qu'arriverait-il cependant si, par un artifice quelconque, on avait l'équivalent d'une résistance négative?

Il pourrait se faire qu'on eût une racine de l'équation caractéristique de la forme $a + b\sqrt{-1}$, où a fût une quantité positive. En ce cas, l'une des variables ayant une amplitude qui croît indéfiniment, de deux choses l'une : ou bien le système ira à sa destruction, ou bien il se produira des phénomènes nouveaux qui ne pourront plus être négligés et exigeront que l'on ait recours à d'autres équations différentielles pour rendre compte des réalités.

Ainsi, si a est négatif, la solution

$$A e^{at} \cos(bt + \varphi)$$

tend vers la valeur asymptotique zéro et le système retourne au repos; ou bien a est positif et la solution tend vers l'infini et le système se disloque.

Enfin, si a est nul, nous avons bien un mouvement périodique, mais essentiellement sous la dépendance des conditions initiales.

Aucun régime asymptotique n'est donc périodique dans le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

9° *Équations non linéaires.* — Supposons que le mouvement élastique du système soit régi par l'équation

$$m x'' = -kx - k' x^2, \tag{1}$$

la force élastique, en raison de son amplitude, n'étant plus simplement proportionnelle à l'élongation et ayant une partie de sa valeur proportionnelle au carré de l'élongation, c'est-à-dire d'un caractère dissymétrique.

Cherchons une solution de la forme $a \cos \omega\tau$. Si k' était nul, il suffirait de poser

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Faisons $m = 1$.

Si k' est très petit, une pareille solution sera simplement une solution approchée; plus exactement, x devra satifaire à l'équation

$$x'' + \omega^2 x = -k' a^2 \cos^2 \omega t \tag{2}$$

ou

$$x'' + \omega^2 x = -k' a^2 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}. \tag{3}$$

Digitized by Google

Je pose alors

$$x = -\frac{k'a^2}{2\omega^2} + a\cos\omega t + z\cos(2\omega t + \varphi)$$

et je reporte dans l'équation (3); j'ai ainsi, en supprimant les termes qui se détruisent,

$$\omega^2 z\cos(2\omega t + \varphi) - 4\omega^2 z\cos(2\omega t + \varphi) = -\frac{k'a^2}{2}\cos^2\omega t,$$

d'où je tire

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ z = \dfrac{k'a^2}{6\omega^2}\cos 2\omega t \end{cases}$$

et

$$x = -\frac{k'a^2}{2\omega^2} + a\cos\omega t + \frac{k'a^2}{6\omega^2}\cos 2\omega t. \tag{4}$$

On pourrait continuer le développement. S'il s'agit d'acoustique, on voit qu'on entendra l'octave, quand il y aura une force élastique dissymétrique.

Autre exemple :

Si la réaction élastique est symétrique, on aura l'équation

$$x'' = -kx - k'x^3.$$

où k' est supposé petit.

La combinaison des forces vives donne

$$\frac{1}{2}[x'^2 - (x'_0)^2] = -k\frac{x^2 - x_0^2}{2} - \frac{k'}{4}(x^4 - x_0^4)$$

ou

$$x'^2 = -\frac{k'}{2}(x^2 - x_0^2 + \alpha^2)(x^2 - x_0^2 - \beta^2).$$

Supposons $-x_0^2 + \alpha^2 > 0$, x oscillera entre $+\sqrt{x_0^2 + \beta^2}$ et $-\sqrt{x_0^2 + \beta^2}$. Cette amplitude dépendra des conditions initiales.

On peut, d'ailleurs, par le même procédé que celui qui a été employé dans l'exemple précédent, essayer un développement en série suivant les multiples d'un angle ωt.

Posant

$$\omega = \sqrt{k}, \qquad \omega_1^2 = \omega^2 + \frac{3}{4}ka^2,$$

Digitized by Google

il vient

$$x = a\cos\omega_1 t + \frac{k' a^3}{4(9\omega_1^2 - \omega^2)}\cos 3\omega_1 t.$$

Physiquement, cela, appliqué au son, indique que lorsque l'amplitude est suffisante pour que le terme en x^3 fasse sentir son influence, d'une part la fréquence ω sera augmentée et deviendra ω_1, d'autre part l'accord de douzième se fera entendre.

10° *Génération des oscillations spontanées.* — Si le système mécanique ou électrique quelconque que nous considérons est au repos dans la position où nous le prenons, et si dans cette position les forces qui agissent sur lui sont en équilibre, ce système ne se mettra pas de lui-même en mouvement. Si les données sont analytiques, cela résulte du théorème de Cauchy relatif au développement en série de la solution. Si les données ne sont pas analytiques, cela ne résulte plus comme conséquence nécessaire des autres principes de la dynamique, mais cela doit être considéré comme un principe spécial et indépendant.

Pour obtenir les solutions périodiques, il convient de rechercher les solutions asymptotiques; et, comme celles-ci ne doivent plus dépendre des conditions initiales, c'est parmi les intégrales singulières qu'il y a lieu de chercher, c'est-à-dire qu'on cherchera les enveloppes des solutions particulières.

Pour savoir si le système est dans une position d'équilibre stable, on pourra, souvent avec avantage, rechercher quel serait le mouvement du système si les coefficients, au lieu d'être variables, étaient constants avec leur valeur actuelle; si l'on a alors affaire à une équation linéaire à coefficients constants, l'instabilité sera caractérisée par l'existence de racines de l'équation caractéristique ayant leur partie réelle positive.

Si les coefficients sont des fonctions des intensités des courants, il faudra se garder de développer en série par la formule de Taylor, car si le mouvement est périodique, à une même valeur de q correspondront généralement deux valeurs de q', ou peut-être plus, et il faudrait choisir celle qui correspond au véritable sens du parcours.

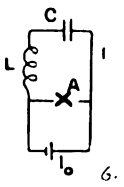
11° *Cas particulier* (Lord Rayleigh-Abraham). — Quand les équations ont d'autres formes que celles que nous avons passées en

Digitized by Google

revue, il peut y avoir des oscillations sans force électromotrice périodique.

Supposons, par exemple, qu'un arc A, aux bornes duquel est branché un circuit oscillant, soit alimenté à courant constant.

Fig. 62.



6.

Soit E la différence de potentiel aux bornes de l'arc, et supposons que cette différence de potentiel dépende du courant oscillant i d'après la loi

$$E = E_0 + ai - bi^3. \tag{1}$$

L'équation relative au circuit oscillant est, d'autre part,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E, \tag{2}$$

q étant la charge du condensateur à l'époque t, quantité dont i est la dérivée par rapport au temps.

Des équations (1) et (2) on déduit, abstraction faite de la constante CE_0,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + (R - a)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = -b\left(\frac{dq}{dt}\right)^3. \tag{3}$$

Considérons donc, à titre d'exemple d'équation non linéaire, l'équation

$$Lx'' + Rx' + \frac{1}{C}x = E_0 + ax' - bx'^3.$$

Posons

$$x - CE_0 = y, \qquad R - a = \alpha$$

et remarquons que si l'on fait $R = a$, $b = 0$, l'équation a pour solution

$$y = A \sin mt, \qquad m = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

Digitized by Google

Supposons donc $\alpha = R - a$ et b très petits, alors si je pose

$$y = A \sin mt,$$

les termes en y'' et y se détruisent et il reste

$$A\alpha m \cos mt = -bA^3 m^3 \cos^3 mt.$$

Or on a

$$\cos^3 mt = \frac{\cos 3mt + 3\cos mt}{4}.$$

En égalant les coefficients du terme en $\cos mt$, on a

$$A\alpha m = -\frac{3}{4} bA^3 m^3 \qquad \text{ou} \qquad A^2 = -\frac{4}{3}\frac{\alpha}{bm^2}.$$

Soit alors

$$y = A \sin mt + u,$$

u étant un terme infiniment petit avec α et b. On aura

$$Lu'' + \alpha u' + \frac{1}{C} u = -by'^3,$$

$\alpha u'$ est du second ordre, $-by'^3$ se réduit à $-\frac{bA^3 \times m^3}{4} \cos 3mt$.

On a donc

$$Lu'' + \frac{1}{C} u = -\frac{bA^3 m^3}{4} \cos 3mt.$$

Pour résoudre cette équation, je pose

$$u = B \cos 3mt$$

et j'ai

$$\left(-L9m^2 + \frac{1}{C}\right) B \cos 3mt = -b\frac{A^3 m^3}{4} \cos 3mt,$$

ou, à cause de

$$m = \frac{1}{\sqrt{CL}},$$

$$-8Lm^2 B = -b\frac{A^3 m^3}{4} \qquad \text{ou} \qquad B = \frac{bA^3 m}{32.L}.$$

On a donc approximativement

$$x - CE_0 = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{(a-R)}{bm^2}} \sin mt + B \cos 3mt + \ldots.$$

On voit qu'il y a une solution indépendante des conditions initiales, qui est une fonction périodique.

Digitized by Google

12° *Périodicité.* — Pour que le mobile soit animé d'un mouvement périodique, il ne suffit pas que le point figuratif ($x = X$, $x' = Y$) décrive une courbe fermée, ou une boucle d'une courbe fermée; il faut encore que le temps τ qu'il met à la parcourir soit fini.

Soit, par exemple, l'équation du mouvement suivant :

$$x'' = x - 2x^3.$$

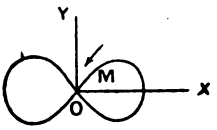
L'origine est un point d'équilibre instable.

L'équation des forces vives donne

$$x'^2 = x^2 - x^4 \qquad \text{ou} \qquad Y^2 = X^2(1 - X^2).$$

On a donc une courbe en double boucle.

Fig. 63.



Mais le mobile met un temps infini à revenir à l'origine.

Supposons, en effet, qu'il soit en un point M, très voisin de l'origine, sa vitesse étant dirigée vers l'origine. On a

$$dt = -\frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

ou sensiblement

$$dt = -\frac{dx}{x},$$

c'est-à-dire

$$x = x_1 e^{-t},$$

x_1 étant l'abscisse du point M.

C'est donc au bout d'un temps infini que le mobile reviendra à l'origine pour y boucler la boucle.

ARC CHANTANT.

1° *Caractéristique statique.* — Alimentons un arc A avec une source de courant continu, de force électromotrice constante E_0.

Mesurons la différence de potentiel aux bornes de l'arc U et l'intensité I. On peut faire varier I, par exemple, en intercalant des résis-

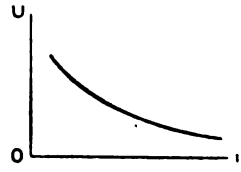
Digitized by Google

tances dans le circuit d'alimentation. Portons I en abscisses, U en ordonnées, on trouve une courbe

$$U = f(I)$$

dite caractéristique statique. Sa forme est indiquée sur la figure 64.

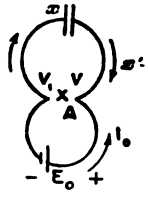
Fig. 64.



On remarquera que la dérivée $\frac{dU}{dI}$ est négative et décroît en valeur absolue quand I augmente.

2° *Arc Duddell. Caractéristique dynamique.* — Si l'on branche aux bornes de l'arc un circuit oscillant (RLC), on constate que des

Fig. 65.



oscillations s'amorcent bientôt et s'entretiennent. Si la fréquence est de l'ordre des sons musicaux, l'arc est un arc chantant.

La période est sensiblement égale à celle du circuit oscillant.

Quand le courant augmente, la caractéristique statique montre que le voltage nécessaire pour entretenir l'arc diminue ; le courant tend donc à monter encore, jusqu'à ce que la perte d'énergie résultant de la grandeur de son amplitude compense l'impulsion reçue ; il va donc diminuer et il diminuera de plus en plus puisque, plus le courant s'affaiblit, plus il faudrait pour l'entretenir un voltage élevé. Cette diminution aura une limite, lorsque l'augmentation relative de voltage permettra un accroissement de la déperdition calorifique sous forme de chaleur de Joule.

Digitized by Google

Ce sont ces motifs par lesquels M. Janet a expliqué qu'il fallait que la caractéristique fût tombante.

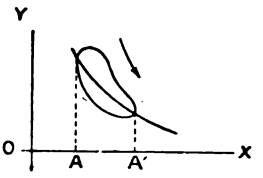
Cependant, en réalité, dès qu'il y a des oscillations, la caractéristique statique cesse d'être valable et l'oscillographe montre qu'on obtient une courbe en forme de haricot, de la forme ci-dessous.

Cette courbe a cependant d'étroits rapports avec la caractéristique statique; il semble bien qu'on puisse dire, en première approximation, que la courbe statique est, pour elle, le diamètre des cordes parallèles à l'axe des y.

C'est du moins ce que nous admettrons.

Naturellement, la surface de cette boucle dépend de la grandeur de l'amplitude du courant oscillant. Si ce courant oscillant est infiniment

Fig. 66.



petit, la boucle devient toute petite et elle s'aplatit sur la caractéristique statique

Il y a donc une relation entre les dimensions de la boucle et la grandeur des oscillations.

Quand le courant oscille de A en A', c'est en A et en A' que sa vitesse de variation s'annule. Les points correspondants de la boucle doivent donc se trouver sur la caractéristique statique qui est le lieu où se meut le point figuratif quand sa vitesse est infiniment lente.

Plus les constantes du circuit oscillant permettront une oscillation rapide, plus la boucle se gonflera, à égalité d'amplitude.

Pour pouvoir faire d'une façon simple une théorie de l'arc chantant, je simplifierai ce diagramme donné par l'expérience. Je supposerai que, quand le courant va de A en A', on a

$$U = f(I),$$

et que, quand il va de A' en A, on a

$$U = f_2(I).$$

Digitized by Google

la caractéristique étant représentée par la courbe

$$U = \frac{1}{2}(f_1 + f_2).$$

Soit $OI = I_0$ le courant moyen, $AI = IA' = \varepsilon$ l'amplitude du courant variable.

On aura

$$IM_1 = f_1(I_0), \qquad IM_2 = f_2(I_0).$$
$$AB_1 = f_1(I_0 - \varepsilon), \qquad A'B'_2 = f_2(I_0 + \varepsilon)$$

et par suite, en s'arrêtant aux premiers termes du développement,

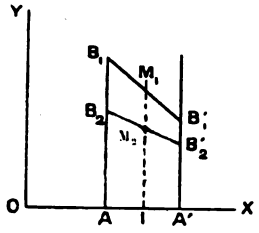
$$\frac{1}{2}(AB_1 + A'B'_2) = \frac{1}{2}[f_1(I_0) - \varepsilon f'_1 + f_2(I_0) + \varepsilon f'_2]$$

ou

$$\frac{1}{2}(AB_1 + A'B'_2) = \frac{1}{2}\varepsilon(-f'_1 + f'_2) + \frac{1}{2}[f_1(I_0) + f_2(I_0)],$$

$(-f'_1 + f_2)$ est une quantité positive, la droite $B_1 M_1$ étant plus inclinée que la droite $M_2 B'_2$.

Fig. 67.



Cela posé, la quantité $\frac{1}{2}(AB_1 + A'B_2)$ est la moyenne entre le plus haut et le plus bas voltage aux bornes de l'arc, c'est le potentiel d'alimentation E.

D'autre part,

$$\frac{1}{2}[f_1(I_0) + f_2(I_0)]$$

est le potentiel U nécessaire pour entretenir dans l'arc le courant I_0 en l'absence d'oscillations. On a donc

$$E - U = \frac{1}{2}\varepsilon(-f'_1 + f'_2).$$

La puissance

$$(E - U)I_0,$$

Digitized by Google

empruntée à la source, correspond à la nouvelle perte d'énergie

$$R(x'_{eff})^2$$

due à la résistance R du circuit oscillant et à l'intensité efficace x'_{eff} du courant oscillant. On a aussi

$$\varepsilon\sqrt{2} = x'_{eff},$$

d'où

$$Rx'_{eff} \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}}(-f'_1 + f'_2).$$

Cette équation, tirée d'une relation énergétique, montre la relation qui doit exister entre l'amplitude des oscillations, la résistance du circuit où elles se produisent et la courbure de la caractéristique statique. Si, en effet, cette courbure était nulle, on ne comprendrait guère que f'_1 et f'_2 pussent être différents de zéro, surtout pour de petites oscillations.

On peut étudier la variation du courant oscillant avec le temps.

En première approximation, on pourrait dire que les oscillations s'entretiennent lorsque l'arc introduit, en dehors d'un terme constant, une résistance négative qui compense la résistance positive du circuit oscillant.

Mais si l'on suppose que cette compensation a lieu à chaque instant, il n'existe plus aucun phénomène qui tende à limiter les oscillations et elles ne peuvent plus dépendre que des conditions initiales accidentelles.

Me basant sur l'expérience, qui montre l'existence de la caractéristique dynamique, j'admettrai en première approximation que la différence de potentiel aux bornes de l'arc est

$$k + b_1 x'$$

quand x' croît, et

$$k + b_2 x'$$

quand x' décroît, x' étant le courant oscillant, c'est-à-dire la dérivée par rapport au temps de la charge du condensateur.

On a donc

$$x' > 0, \qquad Lx'' + Rx' + \frac{1}{C}x = k + b_1 x',$$

$$x' < 0, \qquad Lx'' + Rx' + \frac{1}{C}x = k + b_2 x'.$$

Digitized by Google

Je pose

$$x - kC = y$$

et j'appellerai

$$\beta_1 T_1, \qquad \beta_2 T_2$$

l'amortissement et la période qui correspondent respectivement à b_1 et à b_2. J'aurai

$$\beta_1 = \frac{R - b_1}{2L}, \qquad \beta_2 = \frac{R - b_2}{2L},$$

$$\beta_1^2 + \frac{4\pi^2}{T_1^2} = \beta_2^2 + \frac{4\pi^2}{T_2^2} = \frac{1}{CL}.$$

Partons du moment où y' est nul, y ayant la valeur y_0, au bout d'une demi-pseudopériode ($\frac{1}{2}T_1$), y' s'annulera de nouveau, y sera devenu y_1 et l'on aura

$$y_1 = -y_0 e^{-\beta_1 \frac{T_1}{2}},$$

A partir de ce moment, c'est l'autre équation qui est valable, et l'on part de la valeur y_1 pour laquelle y' est nul pour arriver à la valeur y_2 pour laquelle y' s'annule de nouveau. On a

$$y_2 = -y_1 e^{-\beta_2 \frac{T_2}{2}} = y_0 e^{-\frac{1}{2}(\beta_1 T_1 + \beta_2 T_2)}.$$

On se retrouvera dans les conditions initiales, si l'on a

$$y_2 = y_0$$

ou

$$\beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 = 0.$$

Il faut donc que β_1 et β_2 soient de signes contraires. On a alors un amortissement positif et un amortissement négatif, et l'un compense l'autre.

La période est

$$\frac{1}{2}(T_1 + T_2).$$

La différence de potentiel aux bornes de l'arc a ainsi une partie constante k, qui dépend surtout du courant moyen I_0, puis une partie variable $b_1 x'$ ou $b_2 x'$, qui dépend du courant oscillant et de son sens, car on sait que, le courant I_0 ayant un sens déterminé, ses électrodes ne sont pas identiques; elles n'ont ni la même forme, ni la même température; il doit donc y avoir une dissymétrie naturelle. Les

Digitized by Google

coefficients β_1 β_2 étant d'autant plus différents que les oscillations sont plus grandes, l'équation

$$\beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 = 0$$

est en réalité fonction implicite de l'amplitude des oscillations, et c'est une autre forme de l'équation énergétique écrite plus haut.

Détection. — Si, inversement, on branche aux bornes d'un arc une source de courant alternative, la superposition du courant alternatif au courant continu doit amener une variation du régime de l'arc; si la force électromotrice continue est maintenue constante, le courant moyen devra varier.

J'en conclus qu'en mettant un téléphone dans le circuit d'alimentation d'un arc ou de toute autre résistance à caractéristique tombante, on entendra une impulsion dans le téléphone, toutes les fois que dans le circuit relié aux bornes de l'arc agiront des oscillations.

On a donc là un nouveau détecteur.

Digitized by Google

CHAPITRE XX.

CIRCUITS OSCILLANTS; ACCOUPLEMENT.

Je montre comment les périodes et les amortissements d'un circuit oscillant se trouvent modifiées par l'accouplement de ce circuit au moyen d'une inductance mutuelle avec un autre circuit non oscillant.

En particulier, le circuit oscillant se trouve toujours ainsi accouplé avec le circuit de l'alternateur.

Je détermine les périodes et les amortissements d'une antenne excitée indirectement en dérivation.

J'étudie l'influence d'un circuit intermédiaire, du circuit de Stone, du circuit filtrant de Collin et Jance.

Je rends compte du phénomène paradoxal signalé et expliqué par M. Chaumat.

Peut-être ce phénomène paraîtra-t-il moins paradoxal si l'on rappelle les propriétés générales d'un condensateur placé en dérivation sur une résistance.

Le courant principal i se trouve diminué du courant de charge $C\frac{dv}{dt}$ du condensateur, et par suite la différence de potentiel aux bornes de la résistance se trouve diminuée de la quantité

$$e = Cr\frac{dv}{dt}$$

comme par l'introduction d'une force électromotrice dont l'intégrale de temps est

$$Cr\,\delta v = Cr^2\,\delta i,$$

si l'on passe d'un état de régime permanent à un autre, δi étant la variation du courant.

Si sur le circuit principal on avait eu une inductance L, elle aurait

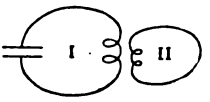
Digitized by Google

introduit une force électromotrice $-L\frac{di}{dt}$, dont l'intégrale eût été $L\delta i$. Donc, le condensateur en dérivation se comporte comme une inductance négative, de là l'appel de courant qui a paru paradoxal.

RÉACTION D'UN CIRCUIT FERMÉ SUR UN CIRCUIT OSCILLANT.

Le système est figuré sur le diagramme ci-joint.

Fig. 68.



L'énergie électrique est

$$W = \frac{1}{2C}Q^2. \tag{1}$$

L'énergie magnétique est T; soit

$$2T = LI^2 + 2MII' + L'I'^2. \tag{2}$$

La chaleur de Joule est, par seconde,

$$J = RI^2 + R'I'^2. \tag{3}$$

Les équations du mouvement de l'électricité sont donc

$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + M\dfrac{dI'}{dt} + RI + \dfrac{1}{C}Q = 0, \\ M\dfrac{dI}{dt} + L'\dfrac{dI'}{dt} + R'I' = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Et par suite, si je pose

$$Q = q\,e^{xt}, \qquad I' = i'\,e^{xt},$$

j'aurai

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = I = q\,x\,e^{xt} = xQ, \qquad \dfrac{dI}{dt} = x\dfrac{dQ}{dt} = x^2Q, \\ \dfrac{dI'}{dt} = i'x\,e^{xt} = xI'. \end{cases} \tag{5}$$

Les équations (4) deviennent donc

$$\begin{cases} \left(Lx^2 + Rx + \dfrac{1}{C}\right)q + Mxi' = 0, \\ Mx^2q + (L'x + R')i' = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Digitized by Google

L'élimination du rapport $\frac{q}{i'}$ donne l'équation caractéristique (7) :

$$\left(Lx^2+Rx+\frac{1}{C}\right)(L'x+R')-M^2x^3=0. \tag{7}$$

Si M était nul, les circuits (I) et (II) seraient indépendants et l'équation (7) se décomposerait, et l'on aurait

$$\begin{cases} Lx^2+Rx+\frac{1}{C}=0, \\ L'x+R'=0. \end{cases} \tag{8}$$

Soient x_1, x_2 les racines de la première de ces deux équations, qui est l'équation caractéristique relative au circuit (I) quand le circuit (II) est ouvert;

Soit x_3 la racine de la seconde équation, qui est l'équation caractéristique du circuit (I) quand le circuit (II) ne réagit pas.

L'équation (7), si je pose

$$k^2=\frac{M^2}{LL'} \qquad (k^2<1) \tag{9}$$

peut s'écrire

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)-k^2x^3=0. \tag{10}$$

Lorsque k est infiniment petit, cette équation a trois racines très voisines de x_1, x_2 et x_3 que l'on peut appeler x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3.

On demande de déterminer dans ce cas h_1, h_2, h_3.

L'équation (10) peut s'écrire

$$x=x_1+k^2\varphi(x) \tag{11}$$

en posant

$$\varphi(x)=\frac{x^3}{(x-x_2)(x-x_3)}. \tag{12}$$

On aura donc, d'après la formule de Lagrange,

$$x=x_1+k^2\varphi(x_1)+\frac{k^4}{1.2}\frac{d}{dx}[\varphi(x_1)]^2+\frac{k^3}{3!}\frac{d^2}{dx^2}[\varphi(x_1)]^3+\dots. \tag{13}$$

Il n'est d'ailleurs point nécessaire de recourir à la formule de

Digitized by Google

Lagrange pour voir qu'en première approximation on a

$$h_1 = k^2 \varphi(x_1). \tag{14}$$

Il s'agit de calculer $\varphi(x_1)$. On a

$$\varphi(x_1) = \frac{x_1^3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \tag{15}$$

ou, en multipliant haut et bas par $x_2 - x_3$, qui est la quantité imaginaire conjuguée de $x_1 - x_3$,

$$\varphi(x_1) = \frac{x_1^3 (x_2 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \tag{16}$$

Introduisons maintenant la pulsation et l'amortissement propres du circuit (II); on a

$$\begin{cases} x_1 = \quad \omega\sqrt{-1} - \beta, \\ x_2 = -\omega\sqrt{-1} - \beta \end{cases} \tag{17}$$

et je poserai par symétrie

$$x_3 = -\beta'. \tag{18}$$

J'aurai donc

$$x_1 - x_2 = 2\omega\sqrt{-1}, \tag{19}$$

puis, x_1 et x_2 seront racines de l'équation

$$x^2 + 2\beta x + \beta^2 + \omega^2 = 0 \tag{20}$$

que j'écrirai, pour simplifier,

$$x^2 + 2\beta x + \gamma = 0, \tag{21}$$

et l'on aura

$$\beta = -\frac{R}{2L}, \qquad \gamma = \frac{1}{CL}; \qquad x_1 + x_2 = -2\beta, \qquad x_1 x_2 = \gamma. \tag{22}$$

On a de même

$$\beta' = -\frac{R'}{L'}, \qquad x_3 = -\beta'. \tag{23}$$

Le dénominateur de (16) devient

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 2\omega\sqrt{-1}\,(\beta'^2 - 2\beta\beta' + \gamma) \tag{24}$$

ou

$$2\omega\sqrt{-1}\,[(\beta' - \beta)^2 + \omega^2].$$

Digitized by Google

Le numérateur devient, d'après (21) et (18),

$$x_1^3(x_2 - x_3) = \beta' x_1^3 + \gamma x_1^2. \tag{25}$$

Or, la division algébrique nous donne

$$\beta' x_1^3 + \gamma x_1^2 = (x_1^2 + 2\beta x_1 + \gamma)(\beta' x_1 + \gamma - 2\beta\beta') + P x_1 + Q \tag{26}$$

avec

$$P = -(\beta'(\gamma - 4\beta^2) + 2\beta\gamma), \tag{27}$$

$$Q = 2\beta'\beta\gamma - \gamma^2. \tag{28}$$

Si, dans la formule (26), je tiens compte du fait que x_1 est racine de l'équation (21), le numérateur se réduit à

$$P x_1 + Q = P\omega\sqrt{-1} + (-P\beta + Q) \tag{29}$$

et le numérateur se trouve ainsi décomposé en ses deux parties, réelle et imaginaire; on peut simplifier la première; on a

$$-P\beta + Q = \beta'\beta(3\omega^2 - \beta^2) + (\beta^4 - \omega^4); \tag{30}$$

d'où

$$\varphi(x_1) = \frac{\beta'\beta(3\omega^2 - \beta^2) + \beta^4 - \omega^4 - \omega\sqrt{-1}[\beta'(\omega^2 - 3\beta^2) + 2\beta(\omega^2 + \beta^2)]}{2\sqrt{-1}\,\omega[\omega^2 + (\beta' - \beta)^2]}. \tag{31}$$

Je puis écrire

$$h_1 = k^2\varphi(x_1) = \delta\omega\sqrt{-1} - \delta\beta \tag{32}$$

et, en utilisant l'expression (31), il vient

$$\delta\beta = \frac{k^2}{2}\,\frac{\beta'(\omega^2 - 3\beta^2) + 2\beta(\omega^2 + \beta^2)}{\omega^2 + (\beta' - \beta^2)}, \tag{33}$$

$$\delta\omega = -\frac{k^2}{2}\,\frac{\beta'\beta(3\omega^2 - \beta^2) + \beta^4 - \omega^4}{\omega[\omega^2 + (\beta' - \beta)^2]}. \tag{34}$$

Au lieu d'envisager l'amortissement β, on peut rechercher la variation du décrément logarithmique βT; on a alors

$$\delta(\beta T) = 2\pi\,\delta\left(\frac{\beta}{\omega}\right) = 2\pi\,\frac{\omega\,\delta\beta - \beta\,\delta\omega}{\omega^2}. \tag{35}$$

Formons donc cette expression; on a

$$\delta(\beta T) = \frac{2\pi k^2}{2\omega^3}\,\frac{\omega^2 2\beta(\omega^2 + \beta^2) + 2(\beta^4 - \omega^4) + \beta^2[\omega^2(\omega^2 - 3\beta^2) + \beta^2(3\omega^2 - \beta^2)]}{\omega^2 + (\beta' - \beta)^2} \tag{36}$$

Digitized by Google

ou

$$\delta(\beta T) = \frac{2\pi k^2[\beta(\omega^2+\beta^2)^2+\beta'(\omega^4-\beta^4)]}{2\omega^3[\omega^2+(\beta'-\beta)^2]}. \tag{37}$$

Comme β est petit par rapport à ω, la formule (37) montre que le décrément logarithmique de l'oscillation subit toujours un accroissement du fait du couplage.

La présence du terme en ω^4 dans l'expression (34) montre aussi que la pulsation et par suite la fréquence se trouve augmentée.

Un cas particulier remarquable est celui où β et β' sont petits devant ω; alors la formule (37) se réduit à

$$\delta(\beta T) = \frac{2\pi k^2}{\omega}\frac{(\beta+\beta')}{2}. \tag{38}$$

La formule (34) donne de même, en ne conservant que les premiers termes,

$$\delta\omega = \frac{k^2}{2}\left(\omega - \frac{\beta^2+\beta\beta'+\beta'^2}{\omega}\right). \tag{39}$$

Toutes ces formules supposent que $k^2 = \frac{M^2}{LL'}$ est très petit; le développement en série, par la formule de Lagrange, supposerait que k a une valeur inférieure à la plus petite valeur pour laquelle deux racines de l'équation (7) sont égales.

Si, dans cette équation, on fait les substitutions $-\infty$ et x_3, on trouve les signes $-$ et $+$. Il y a donc toujours une racine réelle, et elle est négative et comprise entre $-\infty$ et x_3; quand k^2 est infiniment petit, cette racine se confond avec x_3, on voit que l'accouplement a pour effet d'accroître la valeur de β'; et l'on a

$$x - x_3 = k^2\varphi(x_3) \tag{40}$$

ou

$$\delta x_3 = -\frac{k^2\beta'^3}{\omega^2+(\beta'-\beta)^2} = -\delta\beta'. \tag{41}$$

Les formules (33), (34) et (41) se prêtent à une vérification.

En effet, si je pose

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \tag{42}$$

Digitized by Google

j'ai

$$(43)\qquad \begin{cases} h_1 = k^2 \dfrac{x_1^3}{(x_1-x_2)(x_1+x_3)}, \\ h_2 = k^2 \dfrac{x_2^3}{(x_2-x_3)(x_2-x_3)}, \\ h_3 = k^2 \dfrac{x_3^3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{cases}$$

et

$$(44)\qquad h_1+h_2+h_3 = k^2 \sum \frac{x_i^3}{f'(x_i)}.$$

Or on a, d'après (42), pour x^3 une expression de la forme

$$(45)\qquad x^3 = (x_1+x_2+x_3)x^2 + Ax + B,$$

d'où, en vertu des formules d'Euler,

$$(46)\qquad \sum \frac{x^2}{f'(x)} = (x_1+x_2+x_3)\sum \frac{x^2}{f'(x)} = x_1+x_2+x_3.$$

On vérifie, en effet, sans peine, cette relation qui peut s'écrire

$$(47)\qquad 2\,\delta\beta + \delta\beta' = k^2(2\beta+\beta'),$$

formule remarquable; à cet effet, multiplions le second membre par

$$\frac{1}{k^2}[\omega^2+(\beta-\beta')^2].$$

On a, en ordonnant par rapport à β',

$$(48)\quad (2\beta+\beta')(\omega^2+\beta^2-2\beta\beta'+\beta'^2) = 2\beta(\omega^2+\beta^2)+(\omega^2-3\beta^2)\beta'+\beta'^3,$$

et en formant $2\,\delta\beta+\delta\beta'$ et divisant par k^2, on a pour le numérateur de cette somme, d'après (33) et (41),

$$(49)\qquad \beta'(\omega^2-3\beta^2)+2\beta(\omega^2+\beta^2)+\beta'^3.$$

L'égalité des expressions (48) et (49) vérifie l'égalité (47).

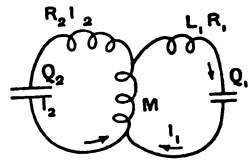
PÉRIODES PROPRES ET AMORTISSEMENTS D'UNE ANTENNE EXCITÉE INDIRECTEMENT EN DÉRIVATION.

Le système comprend deux circuits, l'un contient la capacité C_2 et la self-inductance L_2 d'antenne, ainsi que la résistance R_2 correspondant à l'ensemble des pertes ohmiques et du rayonnement; l'autre

Digitized by Google

contient la capacité C_1 du circuit, la self-inductance L_1 des conducteurs, la résistance R_1 due principalement à la résistance de l'étincelle. Enfin le circuit oscillant et le circuit d'antenne ont une partie commune que nous supposerons dénuée de résistance ohmique; nous admettrons que cette partie a une self-inductance L et un coefficient M d'induction mutuelle avec le circuit d'antenne.

Fig. 69.



On a alors pour l'énergie électrique W

$$W = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2}. \tag{1}$$

Puis I_1 et I_2 étant les dérivées de Q_1 et de Q_2 par rapport au temps, l'énergie magnétique T, si nous appelons I le courant dans la partie commune, compté positivement dans le même sens que I_2 autour du flux commun, sera donnée par l'expression

$$2T = L_1 I_1^2 + 2MII_1 + LI^2 + L_2 I_2^2. \tag{2}$$

Enfin, nous choisissons le sens du courant I_2 de façon qu'on ait

$$I = I_1 + I_2. \tag{3}$$

La chaleur de Joule par seconde sera

$$J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2. \tag{4}$$

On peut, en vertu de (3), écrire (2) sous la forme

$$2T = a_1 I_1^2 + 2b I_1 I_2 + a_2 I_2^2, \tag{5}$$

en posant

$$\begin{cases} a_1 = L_1 + 2M + L, \\ b = M + L, \\ a_2 = L_2 + L. \end{cases} \tag{6}$$

Digitized by Google

Cela posé, les équations du mouvement de l'électricité seront

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1 \dfrac{dI_1}{dt} + b \dfrac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 + \dfrac{1}{C_1} Q_1 = 0, \\ b \dfrac{dI_1}{dt} + a_2 \dfrac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + \dfrac{1}{C_2} Q_2 = 0. \end{cases}$$

Ces équations étant linéaires, à coefficients constants et réels, nous poserons

$$(8)\qquad Q_1 = q_1 e^{xt}, \qquad Q_2 = q_2 e^{xt},$$

et nous aurons

$$(9)\qquad \frac{dQ_1}{dt} = I_1 = x Q_1, \qquad \frac{dQ_2}{dt} = I_2 = x Q_2,$$

d'où

$$(10)\qquad \begin{cases} \left(a_1 x^2 + R_1 x + \dfrac{1}{C_1}\right) q_1 + b x^2 q_2 = 0, \\ b x^2 q_1 + \left(a_2 x^2 + R_2 x + \dfrac{1}{C_2}\right) q_2 = 0. \end{cases}$$

Éliminons le rapport $q_1 : q_2$ et il vient

$$(11)\qquad \left(a_1 x^2 + R_1 x + \frac{1}{C_1}\right)\left(a_2 x^2 + R_2 x + \frac{1}{C_2}\right) - b^2 x^4 = 0.$$

Si dans les équations (7) nous avions $b = 0$, $R_1 = R_2 = 0$, nous aurions les équations de deux systèmes indépendants vibrant sans amortissement avec les périodes ω_1 et ω_2, savoir

$$(12)\qquad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1 C_1}}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2 C_2}},$$

et soit, par exemple,

$$\omega_1 < \omega_2.$$

Je poserai donc, dans l'équation (11),

$$(13)\qquad a_1 = \frac{1}{C_1 \omega_1^2}, \qquad a_2 = \frac{1}{C_2 \omega_2^2};$$

et j'aurai l'équation

$$(14)\qquad \left(\frac{x^2}{\omega_1^2} + 1\right)\left(\frac{x^2}{\omega_2^2} + 1\right) - \frac{k^2 x^4}{\omega_1^2 \omega_2^2} = 0$$

en posant

$$(15)\qquad b^2 = \frac{k^2}{\omega_1^2 \omega_2^2 C_1 C_2}.$$

Digitized by Google

On remarquera que l'on a, pour la valeur absolue de k,

$$k < 1, \tag{16}$$

parce que l'énergie magnétique T, étant essentiellement positive, on doit avoir

$$a_1 a_2 - b^2 > 0, \tag{17}$$

ce qui entraîne l'équation (16).

Examinons alors l'équation (14) comme une équation du second degré en x^2 et faisons, dans le premier membre, les substitutions $-\infty$, $-\omega_1^2$, $-\omega_2^2$, 0, nous obtenons les résultats suivants :

signes de

$-\infty$	$-\omega_1^2$	$-\omega_2^2$	0
$+(1-k^2)$,	$-\frac{k^2\omega_1^2}{\omega_1^2}$,	$-\frac{k^2\omega_2^2}{\omega_1^2}+1$.	

Or, $1-k^2$ est positif, donc il y a deux racines $-x_1^2$ et $-x_2^2$, l'une entre $-\infty$ et $-\omega_1^2$, l'autre entre $-\omega_1^2$ et zéro.

A une racine $x^2 = -x_1^2$ correspond une solution, dans laquelle Q_1 et Q_2 sont de la forme

$$A\cos x_1 t + B\sin x_1 t;$$

par suite, on a deux oscillations non amorties de pulsations x_1 et x_2 distinctes.

On peut noter que même si l'on avait $\omega_2 = \omega_1$, les deux racines x_1 et x_2 resteraient encore distinctes.

Faire $\omega_1 = \omega_2$ c'est régler les deux circuits, le circuit d'antenne d'une part et le circuit oscillant d'autre part, sur la même longueur d'onde; ω_1 et ω_2 sont les pulsations obtenues en supposant que les résistances sont nulles ou négligeables; on sait que la pseudopériode diffère peu de la période propre, quand l'amortissement est très petit.

Quand on a réalisé l'accord des périodes propres ω_1, ω_2, on dit que les deux circuits sont à la résonance. Soient alors Ω_1 et Ω_2 les pulsations correspondant aux valeurs que prennent x_1 et x_2; il est facile de calculer ces pulsations en résolvant l'équation (14) qui devient, en appelant ω la valeur commune de ω_1 et de ω_2.

$$\left(\frac{x^2}{\omega^2}+1\right)^2 - \frac{k^2}{\omega^2}x^2 = 0, \tag{18}$$

Digitized by Google

d'où

$$\frac{x^2}{\omega^2} + 1 = \pm \frac{k x^2}{\omega^2} \tag{19}$$

ou

$$\frac{x^2}{\omega^2}(1 \mp k) = -1 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{\omega\sqrt{-1}}{\sqrt{1 \mp k}}. \tag{20}$$

On a donc, en appelant Ω_1 la plus petite des deux pulsations,

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{1+k}}, \qquad \Omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{1-k}}. \tag{21}$$

On voit donc que, lorsqu'on a réalisé l'accord entre le circuit d'antenne et le circuit oscillant, le système est cependant toujours le siège de deux oscillations.

Supposons maintenant que les quantités R_1 et R_2, au lieu d'être nulles soient infiniment petites, de sorte qu'on puisse négliger leur produit ou le carré de chacune d'elles. En ce cas, au lieu d'une racine purement imaginaire, pour x, j'obtiendrai une racine de la forme

$$\omega\sqrt{-1} - \beta,$$

et, par suite, on aura pour Q_1 et Q_2 une solution dans laquelle ces quantités ont des expressions de la forme

$$e^{-\beta t}(A \sin \omega t + B \cos \omega t),$$

représentant une oscillation périodique amortie, dont l'amortissement est β. Si j'appelle x_0 une racine de l'équation caractéristique en x, obtenue en faisant R_1 et R_2 égaux à zéro, à chaque racine x_0 correspondra une racine $x_0 + h$, dans le cas où R_1 et R_2 sont infiniment petits. Nous allons calculer h.

L'équation (11) peut s'écrire, en développant et négligeant $R_1 R_2$,

$$\left(a_1 x^2 + \frac{1}{C_1}\right)\left(a_2 x^2 + \frac{1}{C_2}\right) - b^2 x^2 + \left[R_1\left(a_2 x^2 + \frac{1}{C_2}\right) + R_2\left(a_1 x^2 + \frac{1}{C_1}\right)\right] x = 0. \tag{22}$$

Il serait facile de déterminer les valeurs de h dans le cas général, mais le seul cas vraiment intéressant pour la pratique est celui dans

Digitized by Google

lequel on a $\omega_1 = \omega_2$. On a alors

$$\left(\frac{x^2}{\omega^2}+1\right)^2 - k^2\frac{x^4}{\omega^4} + (R_1C_1+R_2C_2)\left(\frac{x^2}{\omega^2}+1\right)x = 0. \tag{23}$$

Je pose

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{\omega^2}+1\right)^2 - k^2\frac{x^4}{\omega^4}, \tag{24}$$

et j'ai

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dots \tag{25}$$

ou, tout simplement,

$$f(x_0+h) = hf'(x_0), \tag{26}$$

et l'on a, d'après (24),

$$f'(x_0) = 4\frac{x_0}{\omega^2}\left(\frac{x_0^2}{\omega^2}+1\right) - 4\frac{k^2x_0^3}{\omega^4}, \tag{27}$$

et x_0 satisfait à l'équation (19), de sorte qu'on a

$$f'(x_0) = \pm 4\frac{kx_0^3}{\omega^4}(1\mp k), \tag{28}$$

et l'équation (23) devient, en s'en tenant aux termes du premier ordre,

$$\pm 4\frac{kx_0^3}{\omega^4}(1\mp k)h \pm (R_1C_1+R_2C_2)\frac{kx_0^3}{\omega^2} = 0, \tag{29}$$

ou, en résolvant,

$$h = -\frac{1}{2}\left(\frac{R_1C_1\omega^2}{2}+\frac{R_2C_2\omega^2}{2}\right)\frac{1}{1\mp k}. \tag{30}$$

Mais on a, d'après l'hypothèse de la résonance,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C_1L_1}} = \frac{1}{\sqrt{C_2L_2}} \tag{31}$$

et par suite, en appelant α_1 et α_2 les amortissements des deux circuits,

$$\alpha_1 = \frac{R_1C_1\omega^2}{2} = \frac{R_1}{2L_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{R_2C_2\omega^2}{2} = \frac{R_2}{2L_2}, \tag{32}$$

d'où, pour l'expression (30),

$$-h = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\frac{1}{1\mp k}. \tag{33}$$

On voit qu'on obtient pour $-h$ une valeur réelle et positive, de

Digitized by Google

sorte que, si nous posons $x_0 = \pm\Omega_1$ et $x_0 = \pm\Omega_2$ successivement, nous aurons les racines

$$x_1 = \pm\Omega_1\sqrt{-1} - \beta_1, \qquad x_2 = \pm\Omega_2\sqrt{-1} - \beta_2,$$

β_1 et β_2 étant égaux aux deux valeurs que nous venons de trouver pour $-h$.

On a d'ailleurs, d'après (21),

$$\frac{1}{1+k} = \frac{\Omega_1^2}{\omega^2}, \qquad \frac{1}{1-k} = \frac{\Omega_2^2}{\omega^2},$$

ou, en introduisant les périodes T, T_1, T_2,

$$\frac{1}{1+k} = \frac{T^2}{T_1^2}, \qquad \frac{1}{1-k} = \frac{T^2}{T_2^2}, \tag{34}$$

et semblablement, en introduisant les longueurs d'ondes

$$\lambda = VT, \qquad \lambda_1 = VT_1, \qquad \lambda_2 = VT_2, \tag{35}$$

on a les expressions équivalentes

$$\frac{1}{1+k} = \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}, \qquad \frac{1}{1-k} = \frac{\lambda^2}{\lambda_2^2}. \tag{36}$$

Or on a, d'après (23) et (21),

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\frac{1}{1+k}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\frac{1}{1-k}, \tag{37}$$

d'où

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\lambda^2}{\lambda_2^2}. \tag{38}$$

ou, en fonction des périodes,

$$\beta_1 T_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 T + \alpha_2 T)\frac{T}{T_1}, \qquad \beta_2 T_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 T + \alpha_2 T)\frac{T}{T_2}. \tag{39}$$

Introduisons les décréments logarithmiques Δ_1 et Δ_2 de nos deux ondes et ceux δ_1 et δ_2 des oscillations propres des deux circuits; on a

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\frac{T}{T_1} \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\frac{T}{T_2}. \tag{40}$$

Les décréments sont dans le rapport des fréquences.

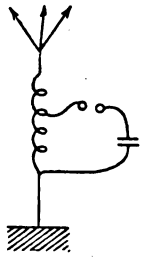
Et si les périodes T, T_1, T_2 sont peu différentes, les décréments des

Digitized by Google

oscillations effectives ont des valeurs voisines de la moyenne des décréments des oscillations propres des deux circuits.

Les équations (38) et (40) donnent les expressions courantes des amortissements et des décréments logarithmiques, en fonction soit des longueurs d'onde, soit des périodes propres des circuits non amortis (*fig.* 70).

Fig. 70.



Avant de quitter ce sujet, je ferai la remarque que tous les calculs s'appliquent à des systèmes de constitutions diverses pourvu que les équations (7) soient valables. Or les équations du mouvement de l'électricité conserveront la même forme pourvu que les expressions de l'énergie électrique W, de la chaleur de Joule J et de l'énergie magnétique T, conservent les formes (1), (4) et (5).

Les équations pourront donc s'appliquer, *mutatis mutandis*, à divers diagrammes; ce qui sera à modifier, c'est, dans les équations (6), les valeurs a_1, b, a_2 qui peuvent être des combinaisons différentes des constantes immédiates des divers circuits.

Dans le cas que nous venons d'envisager, c'est la quantité k qui joue le rôle le plus important; les pulsations Ω_1 et Ω_2 sont distinctes, parce que cette quantité est différente de zéro. Elle caractérise l'accouplement des circuits (I) et (II). La valeur de k^2 est

$$k^2 = \omega_1^2 \omega_2^2 C_1 C_2 b^2 = \frac{b^2}{a_1 a_2} = \frac{(M + L)^2}{(L + 2M + L_1)(L + L_2)}.$$

Si nous avions le diagramme ci-après de l'excitation par induction: nous aurions (*fig.* 71)

$$W = \frac{1}{2C_1} Q_1^2 + \frac{1}{2C_2} Q_2^2,$$

$$J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2,$$

$$2T = L_1 I_1^2 + 2MI_1 I_2 + L_2 I_2^2,$$

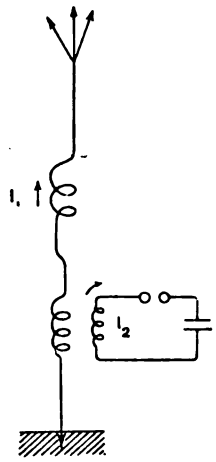
Digitized by Google

et par la suite on aurait

$$k = \frac{b}{\sqrt{a_1 a_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

C'est ce qu'on appelle d'ordinaire le coefficient d'accouplement; si k tend vers l'unité, on a un accouplement fort, si k tend vers zéro, on a un accouplement faible.

Fig. 71.



Avec un accouplement fort, il y a une longueur d'onde qui tend vers zéro, l'autre vers $\lambda\sqrt{2}$, dans le cas de la résonance; avec un accouplement faible, les deux longueurs d'onde se rapprochent l'une de l'autre et de la longueur d'onde propre, qui est celle de chacun des deux circuits considérés isolément.

CIRCUIT INTERMÉDIAIRE DE STONES.

Considérons encore le diagramme ci-après (*fig.* 72), dans lequel on voit l'accouplement entre l'antenne et le circuit oscillant effectué par l'intermédiaire d'un circuit sans résistance sensible.

Soient :

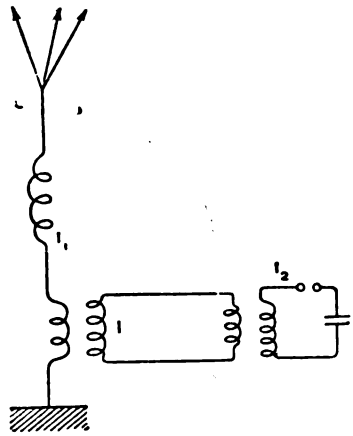
I_1 Le courant d'antenne;

I Le courant du circuit intermédiaire, compté positivement dans le sens où il s'enroule sur le flux magnétique commun entre le circuit

Digitized by Google

intermédiaire et le circuit d'antenne, dans le même sens que l'intensité du courant d'antenne;

Fig. 72.



I_2 Le courant du circuit oscillant, dont le sens positif s'enroule autour du flux commun dans le même sens que I.

On aura

$$W = \frac{1}{2C_1} Q_1^2 + \frac{1}{2C_2} Q_2^2,$$

$$J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2,$$

$$2T = L_1 I_1^2 + 2M_1 I_1 I + \frac{1}{2} LI^2 + 2M_2 I_2 I + \frac{1}{2} L_2 I_2^2.$$

d'où les équations

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + M_1 \frac{dI}{dt} + R_1 I_1 + \frac{Q_1}{C_1} = 0, \tag{1}$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + M_2 \frac{dI}{dt} + R_2 I_2 + \frac{Q_2}{C_2} = 0, \tag{2}$$

$$M_1 \frac{dI_1}{dt} + M_2 \frac{dI_2}{dt} + L \frac{dI}{dt} = 0. \tag{3}$$

Reportons $\frac{dI}{dt}$ dans les équations (1) et (2), elles deviennent

$$\begin{cases} \left(L_1 - \frac{M_1^2}{L}\right) \frac{dI_1}{dt} - \frac{M_1 M_2}{L} \frac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 + \frac{Q_1}{C_1} = 0, \\ -\frac{M_1 M_2}{L} \frac{dI_2}{dt} + \left(L_2 - \frac{M_2^2}{L}\right) \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 + \frac{Q_2}{C_2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Digitized by Google

Ces équations (4) sont de la même forme que les équations (7), mais on a

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1 = L_1 - \dfrac{M_1^2}{L}, \\ b = -\dfrac{M_1 M_2}{L}, \\ a_2 = L_2 - \dfrac{M_2^2}{L}. \end{cases}$$

On aura

$$(6)\qquad a_1 a_2 - b^2 > 0,$$

si l'on a

$$\left(L_1 - \frac{M_1^2}{L}\right)\left(L_2 - \frac{M_2^2}{L}\right) - \frac{M_1^2 M_2^2}{L^2} > 0$$

ou

$$L_1 L_2 - \frac{1}{L}(M_1^2 L_2 + M_2^2 L_1) > 0$$

ou

$$(7)\qquad L > \frac{M_1^2}{L_1} + \frac{M_2^2}{L_2}.$$

Or, L est la somme de deux parties, l'une l_1 qui se rapporte au radio transformateur (I_1 I), l'autre l_2 qui se rapporte au radio-transformateur (I_2 I) et l'on a, évidemment,

$$l_1 L_1 > M_1^2, \qquad l_2 L_2 > M_2^2,$$

d'où

$$(8)\qquad L = l_1 + l_2 > \frac{M_1^2}{L_1} + \frac{M_2^2}{L_2}.$$

Cette inégalité (8) serait vérifiée *a fortiori* si l'on supposait que le circuit intermédiaire eût une inductance propre, en dehors des self-inductances de fuite l_1 et l_2. Comparons (8) et (7), on en conclut que l'inégalité (6) est toujours vérifiée. On aura donc encore $k < 1$ et toute la discussion antérieure reste valable.

Remarquons enfin que l'équation (3) s'intègre et qu'on a

$$(9)\qquad LI + M_1 I_1 + M_2 I_2 = \text{const.},$$

ce qui signifie que le flux magnétique total embrassé par le circuit intermédiaire reste constant, et si l'on est parti du repos, il était nul et reste nul; le flux magnétique passe donc alternativement d'une bobine à l'autre, et c'est ainsi que l'accouplement est réalisé.

L'équation (9), où la constante est nulle, permet d'exprimer linéai-

Digitized by Google

rement I en fonction de I_1 et de I_2, et c'est pourquoi l'énergie magnétique $2T$ se réduira finalement à une fonction quadratique homogène de I_1 et I_2, ce qui fait qu'on retombe sur le cas précédent.

De toute façon, il n'est guère recommandable de surcharger les diagrammes de connexions supplémentaires, celles-ci comportant, en général, des inductances, capacités et résistances. Si l'on tenait compte de ces particularités, le degré de l'équation caractéristique s'élèverait, il en résulterait des oscillations parasites que nous pourrons appeler des *harmoniques*, lesquelles seront sans utilité pour la réception qui est accordée sur une certaine période, et les résistances aussi absorberont une certaine énergie.

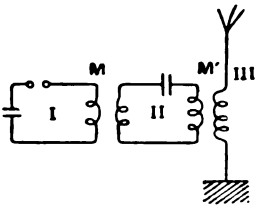
CIRCUIT FILTRANT DE COLLIN ET JANCE.

Intercalons entre l'antenne et le circuit oscillant un circuit intermédiaire. Chaque circuit oscillant est caractérisé par les trois constantes (RLC), avec un indice rappelant le circuit en cause, le circuit (I) réagit sur le circuit (II) par induction et le coefficient d'induction mutuelle est M, le circuit II réagit sur le circuit (III) par le coefficient d'induction mutuelle M'. Soit T l'énergie cinétique, W l'énergie électrique, J la chaleur de Joule, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} 2T = L_1 I_1^2 + 2MI_1 I_2 + L_2 I_2^2 + 2M' I_2 I_3 + L_3 I_3^2, \\ 2W = \frac{1}{C_1} Q_1^2 + \frac{1}{C_2} Q_2^2 + \frac{1}{C_3} Q_3^2, \\ J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2. \end{cases}$$

I_1, I_2, I_3 sont les courants dans les trois circuits, c'est-à-dire les dérivées par rapport au temps des charges Q_1, Q_2, Q_3 du condensateur du

Fig. 73.



circuit d'étincelle de capacité C_1, du condensateur intermédiaire de capacité C_2 et de la capacité d'antenne C_3. Les coefficients M et M' peuvent être pris positifs si le sens positif adopté pour les courants

Digitized by Google

est le même pour les deux circuits qui embrassent le flux magnétique commun, tant à la bobine M qu'à la bobine M'.

Les équations du mouvement de l'électricité sont alors

$$(2)\qquad \begin{cases} L_1\dfrac{dI_1}{dt}+R_1I_1+\dfrac{Q_1}{C_1}=-M\dfrac{dI_2}{dt},\\ L_3\dfrac{dI_3}{dt}+R_3I_3+\dfrac{Q_3}{C_3}=-M'\dfrac{dI_2}{dt},\\ L_2\dfrac{dI_2}{dt}+R_2I_2+\dfrac{Q_2}{C_2}=-M\dfrac{dI_1}{dt}-M'\dfrac{dI_3}{dt}. \end{cases}$$

Cherchons la solution en e^{xt}, nous poserons

$$Q_1=A_1e^{xt},\qquad Q_2=A_2e^{xt},\qquad Q_3=A_3e^{xt}:$$

$$(3)\qquad \begin{cases} L_1f_1(x)=L_1\left(x^2+\dfrac{R_1}{L_1}x+\dfrac{1}{C_1L_1}\right)=L_1(x^2+2\beta_1x+r_1),\\ L_2f_2(x)=L_2\left(x^2+\dfrac{R_2}{L_2}x+\dfrac{1}{C_2L_2}\right)=L_2(x^2+2\beta_2x+r_2),\\ L_3f_3(x)=L_3\left(x^2+\dfrac{R_3}{L_3}x+\dfrac{1}{C_3L_3}\right)=L_3(x^2+2\beta_3x+r_3), \end{cases}$$

$$k=\frac{M^2}{L_1L_2},\qquad k'=\frac{M'^2}{L_2L_3},\qquad I_1=xQ_1,\qquad I_2=xQ_2,\qquad I_3=xQ_3.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (2) et nous avons, après division par e^{xt},

$$(4)\qquad \begin{cases} A_1f_1(x)=-\dfrac{M}{L_1}A_2x^2,\\ A_3f_3(x)=-\dfrac{M'}{L_3}A_2x^2,\\ A_2f_2(x)=-\left(\dfrac{M}{L_2}A_1+\dfrac{M'}{L_2}A_3\right)x^2. \end{cases}$$

Portons dans la troisième équation (4) les valeurs de A_1 et de A_3, et supprimons le facteur commun A_2, nous obtenons l'équation caractéristique en x

$$f_2(x)=+x^2\left(\frac{M}{L_2}\frac{M}{L_1}\frac{x^2}{f_1}+\frac{M'}{L_2}\frac{M'}{L_3}\frac{x^2}{f_3}\right),$$

$$(5)\qquad f_2(x)=x^4\left(\frac{k}{f_1}+\frac{k'}{f_3}\right).$$

Discussion. — Supposons les couplages très faibles k et k' infiniment petits. L'équation donne en première approximation

$$(6)\qquad f_1f_2f_3=0.$$

Digitized by Google

On a les périodes et amortissements des trois circuits, vibrant chacun pour son propre compte. Considérons alors les racines x_0, x'_0 de f_1, on a donc

$$(7)\qquad \begin{cases} x_0 = -\beta_1 + \omega_1\sqrt{-1} \\ x'_0 = -\beta_1 - \omega_1\sqrt{-1} \end{cases} \qquad (\omega_1^2 + \beta_1^2 = r_1^2).$$

Pour voir ce que devient ce couple de racines quand k et k', au lieu d'être nuls, sont très petits, il suffit de poser

$$k = h\varepsilon, \qquad k' = h'\varepsilon,$$

ε étant une quantité infiniment petite et de développer la racine voisine de x_0 de l'équation (5) au moyen de la formule de Lagrange. On pourra d'ailleurs se borner au premier terme, si ε est suffisamment petit, et c'est en somme la formule d'approximation des racines de Newton que l'on emploie alors au lieu de la série de Lagrange. L'équation (5) devient

$$(8)\quad f_1 = \frac{x^4\varepsilon}{f_2}\left(h + \frac{h' f_1}{f_3}\right), \qquad (x - x_0)(x - x'_0) = \frac{\varepsilon x^4}{f_2}\left(h + \frac{h' f_1}{f_3}\right).$$

Nous remarquons que l'on a

$$(9)\qquad x_0 - x'_0 = 2\omega_1\sqrt{-1},$$

et nous aurons, pour valeur approchée de $x - x_0$,

$$(10)\qquad x - x_0 = \frac{\varepsilon x_0^4 h}{2\omega_1\sqrt{-1}\, f_2(x_0)}.$$

Cette expression ne dépend pas de f_3; on voit donc qu'en première approximation les modifiations de la période et de l'amortissement d'un des circuits extrêmes sont indépendants de l'autre circuit extrême. On a donc simplement affaire à la réaction du circuit intermédiaire sur chacun des deux centres, pour ce qui concerne les vibrations voisines des vibrations propres de ces circuits.

Si, au contraire, on envisage les racines $\xi_0\,\xi'_0$ du circuit intermédiaire, nous avons deux racines $\xi\,\xi'$ qui en sont voisines, et si ω_2 est la pulsation correspondante on aura, d'après (5), d'une façon approchée,

$$(11)\qquad x - \xi_0 = \frac{\varepsilon\xi_0^4}{2\omega_2\sqrt{-1}}\left[\frac{h}{f_1(\xi_0)} + \frac{h'}{f_2(\xi_0)}\right],$$

Digitized by Google

ce qui montre que l'altération $x - \xi_0$ de la racine de l'équation caractéristique correspondant à la vibration propre du circuit intermédiaire dépend des coefficients d'accouplement $k = \varepsilon h$ et $k' = \varepsilon h'$ et que l'influence de cette réaction est d'autant plus marquée que ξ_0 est plus près d'une des racines caractéristiques propres des circuits extrêmes; par exemple, si ξ_0 est voisin des racines de $f_1(x)$, le terme en $\frac{1}{f_1(\xi_0)}$ sera prépondérant. Il pourra être nécessaire, en ce cas, de recourir à une approximation plus grande.

Je me bornerai à calculer l'expression (10), parce que les deux termes qui entrent dans (11) ont la même forme. Je me limiterai d'ailleurs au cas où les amortissements sont petits, c'est-à-dire au cas où l'on peut négliger les termes en β_1^2, β_2^2, $\beta_1\beta_2$, etc., devant les termes en ω_1, ω_2 ou ω_3.

On a ainsi

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_0 = -\beta_1 + \omega_1\sqrt{-1}, \\ x_0^2 = -\omega_1^2 - 2\beta_1\omega_1\sqrt{-1}, \\ x_0^4 = \omega_1^4 + 4\beta_1\omega_1^3\sqrt{-1}, \\ f_2(x_0) = x_0^2 + \beta_2 x_0 + r_2, \\ r_2^2 = \omega_2^2 + \beta_2^2 \equiv \omega_2^2, \\ f_2(x_0) = -\omega_1^2 - 2\beta_1\omega_1\sqrt{-1} + 2\beta_2\omega_1\sqrt{-1} + \omega_2^2, \\ \text{ou} \\ f_2(x_0) = \omega_2^2 - \omega_1^2 + 2\omega_1\sqrt{-1}(\beta_2 - \beta_1), \end{array}\right.$$

et par suite (10) devient

$$(13)\qquad x - x_0 = \frac{\varepsilon h}{2\omega_1\sqrt{-1}} \frac{(\omega_1^4 + 4\beta_1\omega_1^3\sqrt{-1})}{[\omega_2^2 - \omega_1^2 + 2\omega_1\sqrt{-1}(\beta_2 - \beta_1)]}.$$

Multiplions haut et bas par la quantité imaginaire conjuguée de $f_2(x_0)$ et conservons le même degré d'approximation, il vient

$$(14)\qquad x - x_0 = \frac{\varepsilon h\omega_1^2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}[\beta_1(2\omega_2^2 - \omega_1^2) - \beta_2\omega_1^2] - \frac{\varepsilon h\omega_1^3}{2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\sqrt{-1}.$$

On a donc les variations $\delta\beta_1$ d'amortissement et $\delta\omega_1$ de pulsation

Digitized by Google

données par les formules

$$(15)\qquad \begin{cases} \delta\beta_1 = \dfrac{k\omega_1^2}{(\omega_2^2-\omega_1^2)^2}\left[\beta_1(2\omega_2^2-\omega_1^2)-\beta_2\omega_1^2\right], \\ \delta\omega_1 = \dfrac{k\omega_1^3}{2(\omega_2^2-\omega_1^2)}. \end{cases}$$

Je passe maintenant au cas où les coefficients d'accouplement k et k' ne sont pas petits, mais je supposerai toujours les amortissements très faibles.

De plus, j'admets que les circuits soient accordés.

Soit alors ω_0 la pulsation commune. Et d'ailleurs, en raison de la petitesse des amortissements, nous pourrons écrire

$$r_1 = r_2 = r_3 = \omega_0^2,$$

d'où

$$(16)\qquad \begin{cases} f_1(x) = x^2 + 2\beta_1 x + \omega_0^2, \\ f_2(x) = x^2 + 2\beta_2 x + \omega_0^2, \\ f_3(x) = x^2 + 2\beta_3 x + \omega_0^2. \end{cases}$$

Il s'agit de voir ce que deviennent les racines de l'équation caractéristique, et plus particulièrement celles dont la pulsation est voisine de la pulsation ω_0. Supposons d'abord $x^2 + \omega_0^2 \neq 0$ et grand par rapport aux amortissements.

On aura, en négligeant les carrés en β_1 et β_3

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{f_1(x)} = \dfrac{x^2+\omega_0^2-2\beta_1 x}{(x^2+\omega_0^2)^2}, \\ \dfrac{1}{f_3(x)} = \dfrac{x^2+\omega_0^2-2\beta_3 x}{(x^2+\omega_0^2)^2}, \end{cases}$$

et l'équation (5) deviendra

$$(18)\quad x^2+\omega_0^2+2\beta_2 x = \frac{x^4}{(x^2+\omega_0^2)^2}\left[(k+k')(x^2+\omega_0^2)-2(\beta_1 k+\beta_3 k')x\right].$$

Si β_1 β_2 β_3 étaient nuls, on aurait

$$(19)\qquad x^2+\omega_0^2 = \frac{x^4(k+k')}{x^2+\omega_0^2},$$

d'où

$$(20)\qquad x = \pm\frac{\omega_0\sqrt{-1}}{\sqrt{1\pm\sqrt{k+k'}}} \qquad \left[k+k' = \frac{1}{L_2}\left(\frac{M^2}{L_1}+\frac{M'^2}{L_3}\right)\right].$$

Digitized by Google

On voit que dans ce cas l'on a deux vibrations non amorties dont les pulsations sont de part et d'autre de la pulsation ω_0 ; remarquons que, comme il n'y a pas de cause d'amortissement, il faut que l'on ait

$$k + k' < 1.$$

L'équation, qui était du sixième degré, s'est réduite au quatrième parce que nous avons supprimé le facteur $x^2 + \omega_0^2$ supposé différent de zéro.

Supposons maintenant que $x^2 + \omega_0^2$ soit de l'ordre des amortissements; les formules (17) cesseront d'être légitimes, mais on aura pour l'équation (5), d'une façon générale, avec $\rho = x^2 + \omega_0^2$,

$$(21)\quad \rho^3 + 2\rho^2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)x + 4\rho(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1)x^2 + 8x^3\beta_1\beta_2\beta_3 = x^4[(k + k')\rho + 2(k\beta_3 + k'\beta_1)x].$$

Or, si ρ est de l'ordre de β_1, β_2 et β_3, tous les termes du premier membre sont du troisième ordre, tandis que ceux du second sont du premier; l'équation se réduira donc sensiblement à

$$(x^2 + \omega_0^2) + 2\frac{(k\beta_3 + k'\beta_1)x}{k + k'} = 0,$$

d'où

$$(22)\quad x = -\frac{k\beta_3 + k'\beta_1}{k + k'} \pm \omega_0\sqrt{-1},$$

en négligeant les carrés de β_1, β_3.

Donc, en dehors des deux couples de racines (20), nous avons les deux racines (22). Il y a donc, grâce au circuit intermédiaire, une vibration dont la pulsation est sensiblement la pulsation propre de chacun des trois circuits accordés, et qui a un amortissement intermédiaire entre les amortissements propres du circuit d'antenne et du circuit d'éclateur.

Revenons aux vibrations auxquelles correspondent les racines (20) et tenons compte maintenant des amortissements; nous aurons des racines voisines des racines (20); si les amortissements correspondants peuvent être rendus plus petits que l'amortissement de la vibration donnée par la racine (22), ce seront ces vibrations moins amorties qui joueront le rôle prépondérant dans tous les systèmes accordés.

L'équation (21) se réduira maintenant à la suivante :

$$(23)\quad \rho^3 + 2\rho^2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)x = x^4(k + k')\rho + 2(k\beta_3 + k'\beta_1)x^5,$$

Digitized by Google

et l'on cherche ce que deviennent les racines $\pm\omega_1$ ou $\pm\omega_2$. On a d'ailleurs

$$(20\,bis)\qquad \omega_1=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+\sqrt{k+k'}}}\qquad \text{ou}\qquad \omega_2=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+\sqrt{k+k'}}}.$$

Quand β_1, β_2, β_3 sont nuls, on a l'équation (19) au lieu de l'équation (23), savoir

$$(19\,bis)\qquad \rho[\rho^2-x^4(k+k')]=0.$$

Le premier membre de (19 *bis*) peut s'écrire

$$(19\,ter)\qquad \rho\left[\rho-x^2\sqrt{k+k'}\right]\left[\rho+x^2\sqrt{k+k'}\right]$$

ou

$$\rho(1-\sqrt{k+k'})(x-x_1)(x-x'_1)(\rho+x^2\sqrt{k+k'})=0$$

avec

$$x_1=\omega_1,\qquad x'_1=-\omega_1.$$

Faisons $x=x_1$ dans tous les termes qui multiplient $x-x_1$, nous aurons une valeur approchée de ce premier membre pour les valeurs de x voisines de x_1 ; on a ainsi

$$(24)\qquad \rho_1(1-\sqrt{k+k'})(x-x_1)(x_1-x'_1)(\rho_1+x_1^2\sqrt{k+k'}).$$

Ce sera sensiblement la valeur de (19 *ter*) ; on peut, d'ailleurs, remplacer ρ par $x_1^2\sqrt{k+k'}$, et $x_1-x'_1$ par $2x_1$, il vient ainsi

$$(25)\qquad \begin{aligned} &x_1^2\sqrt{k+k'}(1-\sqrt{k+k'})(x-x_1)2x_1\times 2x_1^2\sqrt{k+k'}\\ &\quad\equiv(x-x_1)\times 4x_1^5(k+k')(1-\sqrt{k+k'}).\end{aligned}$$

Quand β_1, β_2 et β_3 ne sont pas nuls, c'est l'équation (23) qu'il faut consulter au lieu de (19) ; or, elle peut s'écrire

$$(23\,bis)\quad \rho[\rho^2-x^4(k+k')]=2x[-\rho^2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+x^4(k\beta_3+k'\beta_1)].$$

Mais nous venons de calculer une valeur approchée du premier membre ; il nous suffit donc de calculer de même une valeur approchée du second, ce qui se fera, en remplaçant ρ^2 par $x^4(k+k')$ et donnant à x la valeur x_1.

On a ainsi

$$(26)\qquad -2x_1x_1^4[(k+k')(\beta_1+\beta_2+\beta_3)-(k\beta_3+k'\beta_1)].$$

Digitized by Google

Reportons donc dans l'équation (23 *bis*) les valeurs approchées que nous venons d'obtenir et il vient, en les égalant,

$$(27)\qquad (x-x_1)\,4x_1^3(k+k')\left(1-\sqrt{k+k'}\right) = -2x_1x_1^4[k(\beta_1+\beta_2)+k'(\beta_3+\beta_2)],$$

ou en divisant par x_1^5

$$(28)\qquad x = x_1 - \frac{1}{2}\,\frac{k(\beta_1+\beta_2)+k'(\beta_3+\beta_2)}{k+k'}\,\frac{1}{1-\sqrt{k+k'}}.$$

Appelons $\omega_1\sqrt{-1}-\beta'$ cette racine approchée, on tire de (28)

$$(29)\qquad \omega' = \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\sqrt{k+k'}}},$$

$$(30)\qquad \beta' = \frac{1}{2}\,\frac{k(\beta_1+\beta_2)+k'(\beta_2+\beta_2)}{k+k'}\,\frac{1}{1-\sqrt{k+k'}}.$$

Or, quand il n'y avait pas de circuit intermédiaire, nous avions obtenu (équation 33, page 400) pour les amortissements β_1, β_2

$$(31)\qquad \left\{\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\,\frac{1}{1\mp k_0},$$

et (équation 21, page 399), pour les pulsations Ω_1, Ω_2,

$$(32)\qquad \left\{\begin{matrix}\Omega_1\\ \Omega_2\end{matrix}\right\} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1\mp k_0}}.$$

On voit donc qu'à égalité d'écart entre les pulsations, c'est-à-dire pour $k_0=\sqrt{k+k'}$, l'amortissement β' sera plus petit que l'amortissement β_1 à cause du facteur $\frac{k+(\beta_1+\beta_2)+k'(\beta_3+\beta_2)}{k+k'}$ qui est inférieur à la somme des amortissements, puisqu'il est égal à

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3-\frac{k\beta_3+k'\beta_1}{k_1+k'};$$

de plus, il se réduira sensiblement à

$$\frac{k'}{k+k'}\times\beta_3,$$

si c'est l'amortissement du circuit d'antenne qui est prépondérant, et le coefficient $\frac{k'}{k+k}$ peut être rendu petit.

Digitized by Google

Comparons maintenant l'amortissement qui résulte de la formule (22) à l'amortissement que nous venons d'obtenir, la différence est

$$\frac{k\beta_3+k'\beta_1}{k+k'}-\frac{1}{2}\left[\beta_1+\beta_2+\beta_3-\left(\frac{k\beta_3+k'\beta_1}{k+k'}\right)\right]\frac{1}{1\mp\sqrt{k+k'}}.$$

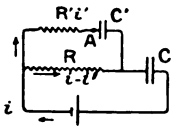
Si β_1 et β_2 sont petits devant l'amortissement de l'antenne et si l'accouplement de l'antenne est lâche, c'est-à-dire si k' est petit, cette différence sera toujours positive; c'est donc la vibration correspondant à ω_2 et non à ω_0 qui aura le plus faible amortissement et qui devra être prise surtout en considération.

Si au contraire k était très petit devant k', et si β_1 et β_2 étaient négligeables, ce serait l'oscillation dont la pulsation est voisine de ω_0 qui serait la moins amortie.

SYSTÈME A DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ, SANS INDUCTANCE.

Je charge le condensateur de capacité C au moyen d'une pile de

Fig. 74.



force électromotrice constante E, à travers une résistance R; soit Q la charge de l'armature du condensateur reliée au pôle positif de la source et i le courant de charge. Aux bornes de la résistance R, je branche un second circuit comprenant un condensateur de capacité C' et une résistance R'. Soit Q' la charge de l'armature de ce second condensateur, qui est reliée métalliquement à la source, et soit i' le courant de charge; le courant i se bifurque en deux, l'un i' qui charge C', l'autre $i-i'$ qui traverse R'.

On suppose qu'à l'origine des temps les deux condensateurs sont déchargés, on a donc pour $t=0$

$$Q=0, \qquad Q'=0,$$

et par suite les courants initiaux i_0 i'_0 satisfont aux relations

$$i_0-i'_0=\frac{E}{R}, \qquad R'i'_0=R(i_0-i'_0).$$

Digitized by Google

Ensuite le conducteur C′ se charge, mais quand le régime permanent s'est établi, on a $i = 0$, $i' = 0$ et le condensateur s'est complètement déchargé.

Ainsi donc, voici un cas où il n'y a pas d'oscillation pseudo périodique, comme nous l'expliquerons, et où, cependant, il y a une fluctuation : un condensateur se charge, puis se décharge.

Quand on remonte le courant i, en traversant le condensateur C, on passe du potentiel zéro du pôle négatif de la source au potentiel $\frac{Q}{C}$ et quand on remonte ensuite le courant i' en passant à travers le condensateur C′, on trouve encore le nouveau saut de potentiel $\frac{Q'}{C'}$; ainsi donc, le potentiel du point A est

$$V_A = \frac{Q}{C} + \frac{Q'}{C'}.$$

C'est la fluctuation de ce potentiel que nous nous proposons d'étudier.

Il est clair que le système a deux degrés de liberté, puisqu'on peut supposer arbitrairement qu'à l'origine des temps φ et φ' aient des valeurs quelconques données. Nous arriverons donc à une équation différentielle du second ordre.

Pour former les équations du mouvement de l'électricité, nous considérons les diverses énergies en jeu.

L'énergie électrique (ou élastique) est

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{Q'^2}{2C'}.$$

L'énergie élémentaire fournie est $E\delta Q$.

La chaleur de Joule (puissance calorifique) est

$$J = R(i - i')^2 + R'i'^2,$$

et la dissipation calorifique pendant le temps virtuel δt est

$$J\,dt = R(i - i')^2\,\delta t + R'i'^2\,\delta t.$$

Or, on a

$$\delta Q = i\,\delta t, \qquad \delta Q' = i'\,\delta t,$$

d'où

$$J\,\delta t = R(i - i')(\delta Q - \delta Q') + R'i'\,\delta Q'$$

ou

$$J\,\delta t = R(i - i')\,\delta Q + [R'i - R(i - i')]\,\delta Q',$$

Digitized by Google

de sorte qu'on peut supposer que le travail virtuel des formes de viscosité est dû aux forces

$$R(i - i') \quad \text{et} \quad -Ri + (R + R')i,$$

les déplacements élémentaires des variables Q et Q' étant δQ et $\delta Q'$.

Appliquons le principe du travail virtuel et nous avons

$$\frac{Q}{C} + R(i - i') = E,$$
$$\frac{Q'}{C'} - Ri + (R + R')i' = 0$$

ou

$$\left(\frac{1}{C} + R\mathfrak{D}\right)Q - R\mathfrak{D}Q' = E,$$
$$-R\mathfrak{D}Q + \left[\frac{1}{C'} + (R + R')\mathfrak{D}\right]Q' = 0.$$

Si je pose

$$\frac{Q}{C} - E = \frac{q}{C},$$

le système en q et Q' sera un système sans second membre et l'équation caractéristique sera

$$\left(\frac{1}{C} + R\mathfrak{D}\right)\left[\frac{1}{C'} + (R + R')\mathfrak{D}\right] - R^2\mathfrak{D}^2 = 0,$$

la lettre $\mathfrak{D}$ pouvant être ici considérée comme l'inconnue.

J'appellerai ρ_1 et ρ_2 les deux racines de cette équation.

Je dis qu'elles sont réelles et négatives.

En développant, on a

$$\frac{1}{CC'} + \left(\frac{R}{C'} + \frac{R + R'}{C}\right)\mathfrak{D} + RR'\mathfrak{D}^2 = 0.$$

Il est clair que si les racines sont réelles, elles sont négatives.

Considérons les deux fonctions

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{Q'^2}{C'},$$

$$U = \frac{1}{2}RQ^2 + \frac{1}{2}(R + R')Q'^2 - RQQ',$$

et cherchons les maxima et minima de $\frac{U}{W}$; les deux fonctions U et W étant homogènes, leur rapport ne dépend que du rapport de Q à Q';

Digitized by Google

je puis donc assujettir Q et Q′ à satifaire à la relation

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}+\frac{1}{2}\frac{Q'^2}{C'}=+1.$$

Alors les valeurs de Q et de Q′, pour lesquelles on a cette relation, auront un module borné supérieurement et inférieurement, car il faut que chacun des termes positifs dont se compose le premier membre soit inférieur ou égal à 1, et, par suite, les valeurs correspondantes de U ont aussi une limite supérieure et inférieure pour des valeurs réelles des variables.

Pour les trouver, on sait qu'il suffit d'annuler les dérivées de

$$W+\lambda U.$$

On a ainsi

$$\frac{\partial W}{\partial Q}+\lambda\frac{\partial U}{\partial Q}=\frac{Q}{C}+\lambda(RQ-RQ')\qquad=0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial Q'}+\lambda\frac{\partial U}{\partial Q'}=\frac{Q'}{C'}+\lambda[(R+R')Q'-RQ]=0.$$

Multipliant la première équation par Q, la seconde par Q′ et ajoutant, il vient

$$Q\frac{\partial W}{\partial Q}+Q'\frac{\partial W}{\partial Q'}+\lambda\left(Q\frac{\partial U}{\partial Q}+Q'\frac{\partial U}{\partial Q'}\right)=0$$

ou, d'après le théorème des fonctions homogènes,

$$2W+2\lambda U=0.$$

Donc

$$\lambda=-\frac{W}{U}.$$

Éliminons Q : Q′, il vient

$$\left(\frac{1}{C}+R\lambda\right)\left[\frac{1}{C'}+(R+R')\lambda\right]-R^2\lambda^2=0.$$

C'est justement en λ l'équation en Θ, l'équation caractéristique.

Elle est satisfaite pour les valeurs réelles λ_1 et λ_2 du maximum et du minimum de $-\frac{W}{U}$, valeurs évidemment négatives comme $-\frac{W}{U}$.

On remarquera que U n'est autre chose que ce que devient 2J quand on y a remplacé i par Q et i' par Q′.

En résumé, nous venons de démontrer que ρ_1 et ρ_2 sont deux quantités réelles et négatives.

Digitized by Google

q et Q′ sont de la forme $A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t}$, et je rappelle qu'on a

$$\frac{Q}{C} - E = \frac{q}{C}.$$

Donc

$$\frac{Q}{C} + \frac{Q'}{C'}$$

est de la forme

$$M + N e^{\rho_1 t} + P e^{\rho_2 t},$$

et l'on obtient aisément la formule solution

$$\frac{Q}{C} + \frac{Q'}{C'} = E\left(1 - \frac{\rho_1 e^{\rho_1 t} - \rho_2 e^{\rho_2 t}}{\rho_1 - \rho_2}\right).$$

Je dis que cette expression satisfait à toutes les conditions; en effet, pour t infini, les exponentielles disparaissent, Q′ devient nul et $\frac{Q}{C}$ doit se réduire à E; cela détermine le coefficient M.

D'autre part, pour $t = 0$, on a $Q = Q' = 0$; or pour $t = 0$ nous avons bien une identité.

Prenons les dérivées par rapport au temps et nous aurons

$$\text{(A)} \qquad \frac{i}{C} + \frac{i'}{C'} = - E \frac{\rho_1^2 e^{\rho_1 t} - \rho_2^2 e^{\rho_2 t}}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Or, d'après les valeurs de i_0 et de i'_0 que nous avons obtenues au début, on a

$$i_0 = E\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right), \qquad i'_0 = \frac{E}{R'}$$

et

$$\frac{i_0}{C} + \frac{i'_0}{C'} = E\left[\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \frac{1}{C'R'}\right].$$

En se reportant à l'équation caractéristique, on voit qu'on a

$$\text{(A′)} \qquad \frac{i_0}{C} + \frac{i'_0}{C'} = - E(\rho_1 + \rho_2).$$

Or, si nous faisons $t = 0$ dans l'équation (A), on retrouve l'équation (A′).

Les deux conditions relatives aux valeurs initiales de Q et Q′ d'une part, et de i et i' d'autre part, nous auraient déterminé N et P. On voit que notre formule est ainsi entièrement justifiée, puisqu'elle satisfait aux conditions déterminatives.

Digitized by Google

Remarque. — On aura

$$\frac{Q}{C} + \frac{Q'}{C'} = E$$

si l'on peut avoir

$$\rho_1 e^{\rho_1 t} = \rho_2 e^{\rho_2 t};$$

la valeur correspondante de t est $t_1 = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \log \frac{\rho_1}{\rho_2}$ et par suite forcément positive, car si l'on a

$$\rho_1 > \rho_2 \quad \text{on a} \quad |\rho_1| < |\rho_2|, \quad \text{d'où} \quad \log \frac{\rho_2}{\rho_1} > 0,$$

et si l'on a

$$\rho_1 < \rho_2 \quad \text{on a} \quad |\rho_1| > |\rho_2|, \quad \text{d'où} \quad \log \frac{\rho_2}{\rho_1} < 0.$$

Elle est donc admissible.

Donc V_A atteint E au temps t_1, dépasse cette valeur, atteint son maximum pour la valeur t_M du temps t qui annule

$$\rho_1^2 e^{\rho_1 t} - \rho_2^2 e^{\rho_2 t}.$$

On a donc

$$t_M(\rho_1 - \rho_2) = \log\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \quad \text{ou} \quad t_M = 2t_1.$$

Ensuite V_A diminue et tend asymptotiquement vers E.

Ce résultat, sorte de coup de bélier dans un système sans inertie, a paru paradoxal; il mérite donc d'être noté.

Digitized by Google

CHAPITRE XXI.

AMORTISSEMENT; FORMULE DE BJERKNÈS.

Dans ce Chapitre, je calcule l'effet intégral dans un circuit oscillant soumis à une force électromotrice périodique amortie donnée.

La formule obtenue permet d'établir les courbes de résonance et de calculer le décrément logarithmique.

Cette méthode est due à Bjerknès.

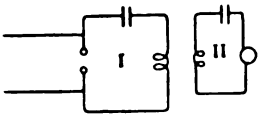
J'indique ensuite, en étudiant la composition de deux vibrations périodiques amorties, comment on peut se rendre compte de l'allure du courant dans un circuit de condensateur employé comme récepteur.

La fin de ce Chapitre est consacrée à la description des diverses courbes de résonance qu'on peut avoir à envisager.

MESURE DU DÉCRÉMENT LOGARITHMIQUE. FORMULE DE BJERKNÈS.

Soit un circuit oscillant (I) pourvu d'un éclateur. Une étincelle éclate et le circuit est le siège d'un mouvement électrique périodique amorti.

Fig. 75.



J'approche de ce circuit oscillant le circuit d'un ondemètre. C'est un circuit (II) qui contient inductance et capacitance et qui, de plus, est pourvu d'un appareil thermique qui mesurera

$$\int i^2 dt.$$

Digitized by Google

Si les étincelles se répètent n fois par seconde, identiques à elles-mêmes, le thermique, par sa déviation permanente, mesurera l'effet intégral :

$$n\int i^2\,dt.$$

L'amortissement étant d'ailleurs assez grand pour que i soit devenu très sensiblement nul avant qu'une nouvelle étincelle éclate, on pourra écrire o et ∞ comme limites de l'intégrale, sans aucune erreur. En effet, n est tout au plus de l'ordre des fréquences musicales, tandis que la pseudo-période des oscillations de radiotélégraphie est de l'ordre du trois cent-millième de seconde, même pour des longueurs d'onde de 3^{km}.

Enfin, nous supposons l'accouplement très lâche de telle façon que le petit courant du circuit (II) ne réagisse aucunement sur le circuit (I), lequel sera, le plus souvent, parcouru par un courant beaucoup plus fort.

Dans ces conditions, le circuit (II) peut être considéré comme oscillant pour son propre compte sous l'action d'une force électromotrice de la forme

$$\mathrm{E}\,e^{-\alpha_1 t}\cos\omega_1 t,$$

α_1 étant le coefficient d'amortissement du circuit (I) et ω_1 sa pseudo-période.

Soient q la charge du condensateur, $\frac{dq}{dt} = i$ le courant de charge. L'équation du problème sera

$$\mathrm{L}\frac{d^2q}{dt^2} + \mathrm{R}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\mathrm{C}} = \mathrm{E}\,e^{\alpha_1 t}\cos\omega_1 t. \tag{1}$$

Les conditions initiales sont

$$q = 0,\quad i = 0 \qquad \text{ou} \qquad q = 0,\quad \frac{dq}{dt} = 0. \tag{2}$$

Je pose

$$m_1 = -\alpha_1 + \omega_1\sqrt{-1} \tag{3}$$

et je substitue à l'équation (1) l'équation

$$\mathrm{L}\frac{d^2q}{dt^2} + \mathrm{R}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\mathrm{C}} = \mathrm{E}\,e^{m_1 t}. \tag{4}$$

L'équation (4) et les conditions (2) étant linéaires et à coefficients

Digitized by Google

constants d'une part, ce qui permet l'application du principe de superposition, et ces coefficients étant réels d'autre part, ce qui permet la séparation des parties réelles et des parties purement imaginaires, il suffit de résoudre l'équation (4) avec les conditions (2) et de prendre la partie réelle de la solution.

On a alors pour solution

$$(5)\quad q = \frac{E}{L\Delta}\begin{vmatrix} e^{m_1 t} & m_1 & 1 \\ e^{m' t} & m' & 1 \\ e^{m'' t} & m'' & 1 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta = (m_1 - m')(m_1 - m'')(m' - m''),$$

m' et m'' étant les racines de l'équation caractéristique

$$(6)\qquad L x^2 + R x + \frac{1}{C} = 0.$$

On a donc

$$(7)\qquad L m_1^2 + R m_1 + \frac{1}{C} = L(m_1 - m')(m_1 - m'').$$

La solution (5) donne

$$(8)\qquad i = \frac{E}{L\Delta}\begin{vmatrix} m_1 e^{m_1 t} & m_1 & 1 \\ m' e^{m' t} & m' & 1 \\ m'' e^{m'' t} & m'' & 1 \end{vmatrix}.$$

On a bien d'ailleurs $i = 0$ et $q = 0$ pour $t = 0$, car, dans chacun des deux déterminants ci-dessus, deux colonnes deviennent identiques.

Enfin, si nous reportons l'expression (5) de q dans l'équation différentielle (4), nous avons

$$(9)\qquad \frac{E}{L\Delta}\begin{vmatrix} \left(L m_1^2 + R m_1 + \frac{1}{C}\right) e^{m_1 t} & m_1 & 1 \\ \left(L m'^2 + R m' + \frac{1}{C}\right) e^{m' t} & m' & 1 \\ \left(L m''^2 + R m'' + \frac{1}{C}\right) e^{m'' t} & m'' & 1 \end{vmatrix} = E e^{m_1 t}.$$

Or, le second et le troisième élément de la première colonne sont nuls parce que m' et m'' sont racines de (6). Le premier élément est égal à

$$L(m_1 - m')(m_1 - m''),$$

d'après (7). En développant par rapport aux éléments de la première

Digitized by Google

colonne, on a donc

$$(10) \qquad \frac{E}{L\Delta} L(m_1 - m')(m_1 - m'')(m' - m'')\, e^{m_1 t} = E\, e^{m_1 t}.$$

L'équation (4) est donc identiquement satisfaite.

On a donc

$$(11) \quad i = \frac{E}{L}\left[\frac{m_1 e^{m_1 t}}{(m_1 - m')(m_1 - m'')} - \frac{m' e^{m' t}}{(m_1 - m')(m' - m'')} + \frac{m'' e^{m'' t}}{(m_1 - m'')(m' - m'')}\right].$$

Je pose alors

$$(12) \qquad m' = -\alpha + \omega\sqrt{-1}, \qquad m'' = -\alpha - \omega\sqrt{-1}.$$

Je suppose que l'on fasse varier la capacité du condensateur de façon à tracer la courbe des indications du thermique en fonction de la longueur d'onde ω du circuit. L'amortissement α dépend de L et de R, il reste constant. Mais ω variera aux environs de la valeur ω_1. Quand j'aurai

$$\omega = \omega_1,$$

je dirai que je suis dans le cas de la résonance.

Les quantités α et α_1 sont supposées très petites. Elles sont donc négligeables vis-à-vis de ω et ω_1. Mais quand je serai dans le voisinage de la résonance, j'admettrai que α et α_1 sont de l'ordre de grandeur de $\omega - \omega_1$.

On aura donc le Tableau des valeurs :

	Résonance.	Voisinage de la résonance.
$m_1 - m' = \alpha - \alpha_1 + (\omega_1 - \omega)\sqrt{-1}\ldots$	$\alpha - \alpha_1$	$\alpha - \alpha_1 + (\omega_1 - \omega)\sqrt{-1}$
$m_1 - m'' = \alpha - \alpha_1 + (\omega_1 + \omega)\sqrt{-1}\ldots$	$2\omega_1\sqrt{-1}$	$2\omega_1\sqrt{-1}$
$m' - m'' = 2\omega\sqrt{-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$2\omega_1\sqrt{-1}$	$2\omega_1\sqrt{-1}$

1° *Cas de la résonance.*

La quantité $\frac{1}{m_1 - m'}$ étant très grande, il reste seulement à considérer les deux premiers termes

$$i = \frac{E}{L(\alpha - \alpha_1)} \frac{\omega_1\sqrt{-1}\, e^{m_1 t} - \omega_1\sqrt{-1}\, e^{m' t}}{2\omega_1\sqrt{-1}},$$

ou, en revenant à la solution réelle,

$$(13) \qquad i = \frac{E}{2L(\alpha - \alpha_1)}(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha t})\cos\omega t.$$

Digitized by Google

2° *Cas du voisinage de la résonance.*

Là encore, la quantité $\frac{1}{m_1 - m'}$ est très grande, de sorte que les deux premiers termes sont seuls à considérer; et il vient

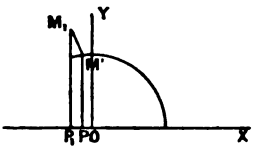
$$i = \frac{E(m_1 e^{m_1 t} - m' e^{m' t})}{L^{-}[\alpha - \alpha_1 + (\omega_1 - \omega)\sqrt{-1}]\, 2\omega_1 \sqrt{-1}}.$$

On peut encore supposer $m_1 = m' = \omega_1 \sqrt{-1}$.

Mais quant à la quantité $\alpha - \alpha_1 + (\omega_1 - \omega)\sqrt{-1}$, comme $\alpha - \alpha_1$ et $\omega_1 - \omega$ sont deux quantités très petites, l'argument de cette quantité imaginaire a des valeurs variables. Nous admettrons toutefois que, pour des valeurs telles que $\omega_1 - \omega$ soit encore une quantité très petite, on ait sensiblement

$$\text{arc tang}\frac{\omega_1 - \omega}{\alpha - \alpha_1} = +\frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad -\frac{\pi}{2}.$$

Fig. 76.



Ainsi, dans le plan des imaginaires, soient

$$OP = -\alpha, \qquad OP_1 = -\alpha_1,$$
$$P_1M_1 = \omega_1, \qquad PM' = \omega,$$

dans le cas, voisin de la résonance, que nous envisageons ici, gr PP_1 est une très petite quantité, M_1M' aussi est une très petite quantité vis-à-vis de PM_1 ou de PM', mais on admet que la direction de $M'M_1$ est sensiblement celle de l'axe des Y positifs ou négatifs. Autrement dit, en faisant varier ω, le point M' se déplace sur une parallèle à l'axe des y; dans le cas de la résonance, les points M_1 et M' sont à la même hauteur au-dessus de l'axe des abscisses, mais, dans le cas voisin de la résonance, on suppose que ω s'écarte assez de ω_1 pour que la droite $M'M_1$ soit à peu près perpendiculaire à l'axe des x.

On a alors sensiblement, dans les coefficients des exponentielles,

$$m_1 = m = \omega_1 \sqrt{-1},$$

Digitized by Google

et, d'autre part,

$$\alpha - \alpha_1 + (\omega_1 - \omega)\sqrt{-1} = \sqrt{(\alpha-\alpha_1)^2 + (\omega_1-\omega)^2}\, e^{\pm \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}.$$

Choisissons, par exemple, le signe +; on arriverait, d'ailleurs, au même résultat en choisissant le signe —. On aura, en revenant aux quantités réelles,

$$i = \frac{E\,(e^{-\alpha_1 t}\sin\omega_1 t - e^{-\alpha t}\sin\omega t)}{2L\sqrt{(\alpha-\alpha_1)^2+(\omega_1-\omega)^2}}. \tag{14}$$

Les formules (13) et (14) permettent de calculer, dans l'un et l'autre cas, l'effet thermique

$$\int i^2\, dt.$$

Je l'appellerai j_r dans le cas de la résonance et j dans l'autre cas.

Les quantités α_1 et α étant petites vis-à-vis de ω et ω_1, on doit appliquer les formules approchées

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha_1 t}\cos^2\omega_1 t\, dt = \frac{1}{4\alpha_1}\times\frac{\omega_1^2+2\alpha_1^2}{\omega_1^2+\alpha_1^2} \equiv \frac{1}{4\alpha_1}, \tag{15}$$

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha_1 t}\sin^2\omega_1 t\, dt = \frac{1}{4\alpha_1}\times\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2+\alpha_1^2} \equiv \frac{1}{4\alpha_1}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} 2\int_0^\infty e^{-(\alpha_1+\alpha)t}\sin\omega_1 t\sin\omega t\, dt \\ = \int_0^\infty e^{-(\alpha_1+\alpha)t}[\cos(\omega_1-\omega)t - \cos(\omega_1+\omega)t]\, dt \\ = \frac{\alpha+\alpha_1}{(\omega_1-\omega)^2+(\alpha_1+\alpha)^2} - \frac{\alpha+\alpha_1}{(\omega_1+\omega)^2+(\alpha_1+\alpha)^2}, \end{aligned} \tag{17}$$

ce qui, dans le cas du voisinage de la résonance, se réduit à

$$\frac{\alpha+\alpha_1}{(\omega_1-\omega)^2}.$$

On a donc

$$j_r = \frac{E^2}{4L^2(\alpha-\alpha_1)^2}\left(\frac{1}{4\alpha}+\frac{1}{4\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_1}\right) = \frac{E^2}{16L^2\alpha_1\alpha(\alpha+\alpha_1)} \tag{18}$$

et

$$j = \frac{E^2}{4L^2[(\alpha-\alpha_1)^2+(\omega-\omega_1)^2]}\left(\frac{1}{4\alpha}+\frac{1}{4\alpha_1}-\frac{\alpha+\alpha_1}{(\omega-\omega_1)^2}\right).$$

Digitized by Google

Mais j'ai

$$\frac{(\alpha-\alpha_1)^2+(\omega-\omega_1)^2}{1-\frac{4\alpha\alpha_1}{(\omega_1-\omega)^2}}=[(\omega-\omega_1)^2+(\alpha-\alpha_1)^2]\left(1+\frac{4\alpha\alpha_1}{(\omega-\omega_1)^2}\right),$$

ou, sensiblement,

$$(\omega-\omega_1)^2+(\alpha+\alpha_1)^2;$$

d'où

$$j=\frac{E^2}{16L^2}\times\frac{\alpha_1+\alpha}{\alpha_1\alpha}\times\frac{1}{(\alpha+\alpha_1)^2+(\omega-\omega_1)^2}, \tag{19}$$

et par suite, en combinant (18) et (19),

$$\alpha+\alpha_1=|\omega-\omega_1|\times\sqrt{\frac{j}{j_r-j}}.$$

On voit que la résonance correspond bien au maximum de j. Cela permet de trouver le point de résonance. Ensuite, la formule donne le décrément des oscillations reçues, quand on connaît le décrément de l'ondemètre.

Si n et n_1 sont les fréquences correspondant à ω et ω_1, on aura

$$\omega=2\pi n=\frac{2\pi}{T},\qquad \omega_1=2\pi n_1=\frac{2\pi}{T_1},$$

T_1 différant peu de T.

Si δ et δ_1 sont pris égaux à αT et $\alpha_1 T_1$, ou $\frac{\alpha}{n}$ et $\frac{\alpha_1}{n_1}$, on aura sensiblement

$$\alpha=n\delta,\qquad \alpha_1=n\delta_1,$$

d'où

$$\delta+\delta_1=\frac{2\pi}{n}|n-n_1|\sqrt{\frac{j}{j_r-j}}. \tag{20}$$

C'est la formule de Bjerknès.

Observation. — Valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi)\,dt.$$

Soit

$$\frac{dA}{dt}=e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi).$$

On aura

$$A=\frac{e^{-\beta t}}{r}\sin(\omega t+\varphi-\theta)+\text{const.},$$

Digitized by Google

comme on le vérifie immédiatement, d'après la règle connue de dérivation des fonctions périodiques amorties ; d'où

$$A_0^{\infty} = \frac{1}{r}\sin(\theta - \varphi).$$

Exemple :

$$A_0^{\infty} = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\alpha_1)t}\cos(\omega_1 - \omega)t\,dt.$$

On a

$$\cos(\omega_1 - \omega)t = \sin\left[(\omega - \omega_1)t + \frac{\pi}{2}\right].$$

Il faut faire dans la formule la substitution

$$\begin{pmatrix} \beta & \omega \\ \alpha + \alpha_1 & \omega - \omega_1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$A_{\varphi}^{\infty} = \frac{-1}{r}\cos\theta$$

avec

$$\begin{aligned} -r\cos\theta &= \alpha + \alpha_1, \\ r\sin\theta &= \omega - \omega_1, \\ r^2 &= (\alpha + \alpha_1)^2 + (\omega - \omega_1)^2, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$A_0^{\infty} = -\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\alpha + \alpha_1}{(\alpha + \alpha_1)^2 + (\omega - \omega_1)^2}.$$

AUTRE FORME DE L'ÉQUATION DE BJERKNÈS.

L'équation

$$(\alpha + \alpha_1)^2 = (\omega - \omega_1)^2 \frac{j}{j_r - j}$$

peut se mettre sous une forme simple; posons

$$\frac{\alpha_1 + \alpha}{\omega - \omega_1} = \operatorname{tang}\psi,$$

il vient

$$j(\operatorname{tang}^2\psi + 1) = j_r$$

ou

$$\sqrt{j} = \sqrt{j_r}\cos\psi.$$

Problème. — Séparer α et α_1. Soit

$$\Delta = \delta + \delta_1.$$

Digitized by Google

Intercalons dans le circuit du résonateur, dit M. Béthenod, une résistance ohmique supplémentaire de manière que son décrément devienne $\delta' > \delta$. On pourra déterminer la somme

$$\Delta' = \delta_1 + \delta'.$$

Mais, à fréquence d'étincelles constante, on a

$$\frac{j'_r}{j_r} = \frac{\alpha_1 + \alpha}{\alpha'} \times \frac{\alpha}{\alpha_1 + \alpha'} = \frac{\delta}{\delta'} \times \frac{\Delta}{\Delta'},$$

j'_r étant ce que devient j_r quand α devient α'.

Soit k ce rapport. On aura

$$\delta + \delta_1 = \Delta, \qquad \delta' + \delta_1 = \Delta', \qquad \delta' = \frac{\Delta}{\Delta'}\frac{\delta}{k};$$

d'où δ, δ' et δ_1,

$$\delta_1 = \frac{\Delta^2 - \Delta'^2 k}{\Delta - \Delta' k}, \qquad \delta = \frac{k\Delta'^2 - k\Delta\Delta'}{\Delta - \Delta' k}, \qquad \delta' = \frac{\Delta\Delta' - \Delta^2}{\Delta - \Delta' k}.$$

L'équation de Bjerknès étant symétrique en δ_1 et δ, on peut, au lieu d'agir sur δ, agir sur l'amortissement du circuit excitateur par l'addition d'une résistance auxiliaire non inductive. Une simple permutation dans les formules précédentes donnera la nouvelle solution.

COMPOSITION DE DEUX VIBRATIONS AMORTIES.

On donne les deux vibrations amorties

$$Y = A\, e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi), \qquad Y' = A' e^{-\alpha' t} \sin(\omega' t + \varphi'),$$

et l'on demande d'étudier la fonction

$$y = Y + Y'.$$

Ce problème se rattache directement à celui du mouvement de l'électricité dans le circuit d'un résonateur soumis, comme dans la méthode de Bjerknès, relative à la détermination des décréments, à l'action d'un excitateur qui donne une oscillation périodique amortie.

Dans ces conditions, on sait que la solution résulte de la composition d'une oscillation forcée dont la pseudo-période et l'amortissement sont ceux de l'excitateur et d'une vibration libre dont la pseudo-période et l'amortissement sont ceux du résonateur.

Digitized by Google

Il est commode, quand on examine le mouvement du pendule par exemple, de considérer la masse comme décrivant une ellipse dont la configuration et l'orientation se modifient lentement au cours du temps.

Or, dans le problème électrique, $\frac{\omega - \omega'}{2} = \Omega'$ est une petite quantité ; il en est de même de α et de α' et, on peut le dire *a fortiori*, de $\frac{\alpha - \alpha'}{2} = \mu'$. Il sera donc commode de voir ce que devient y quand on donne à ω et ω' une valeur égale à leur moyenne Ω, tandis qu'on donne à α et α' aussi une valeur égale à leur moyenne μ, puis, dans le cas général, la solution pourra être considérée comme ayant la même forme, mais les coefficients, au lieu d'être des constantes, seront des quantités qui varieront avec le temps, mais d'autant plus lentement que Ω' et μ' seront des quantités plus petites.

Je pose donc

$$\Omega = \frac{\omega + \omega'}{2}, \qquad \Omega' = \frac{\omega - \omega'}{2},$$
$$\omega = \Omega + \Omega', \qquad \omega' = \Omega - \Omega',$$
$$\mu = \frac{\alpha + \alpha'}{2}. \qquad \mu' = \frac{\alpha - \alpha'}{2},$$
$$\alpha = \mu + \mu', \qquad \alpha' = \mu - \mu',$$

et, au lieu de considérer la fonction y, je considérerai le vecteur z dont y est la projection sur l'axe des quantités purement imaginaires.

Soient donc

$$z = A e^{-\alpha t} e^{(\omega t + \varphi)\sqrt{-1}} + A' e^{-\alpha' t} e^{(\omega' t + \varphi')\sqrt{-1}}$$

ou

$$z = A e^{-\alpha t + \varphi\sqrt{-1}} e^{\Omega t + \Omega' t} + A' e^{-\alpha' t + \varphi'\sqrt{-1}} e^{\Omega t - \Omega' t}$$

ou

$$z = N e^{\Omega t};$$

soient N_0 le module, ψ l'argument de N ; je poserai

$$N = N_x + N_y\sqrt{-1} = N_0 e^{\psi\sqrt{-1}} = A e^{-\alpha t} e^{(\varphi + \Omega' t)\sqrt{-1}} + A' e^{-\alpha' t} e^{(\varphi' - \Omega' t)\sqrt{-1}};$$

d'où

$$N_x = A e^{-\alpha t} \cos(\varphi + \Omega' t) + A' e^{-\alpha' t} \cos(\varphi' - \Omega' t),$$
$$N_y = A e^{-\alpha t} \sin(\varphi + \Omega' t) + A' e^{-\alpha' t} \sin(\varphi' - \Omega' t)$$

et

$$N_0^2 = A^2 e^{-2\alpha t} + A'^2 e^{-2\alpha' t} + 2AA' e^{-(\alpha + \alpha')t} \cos(\varphi - \varphi' + 2\Omega' t).$$

Digitized by Google

Nous avons déjà étudié la variation d'un vecteur N de la forme précédente quand α et α' sont nuls; nous avons vu qu'alors l'extrémité du vecteur N décrivait autour de l'origine une ellipse, tandis que la vitesse aréolaire demeurait constante.

Nous pouvons encore nous représenter de même ici le mouvement de l'extrémité du vecteur N, mais nous voyons que le maximum et le minimum de la grandeur de N, au lieu d'être égaux à $A + A'$ et à $A - A'$, sont égaux à

$$Ae^{-\alpha t} \pm A'e^{-\alpha' t} = e^{-\mu t}(Ae^{\mu' t} \pm Ae^{-\mu' t}),$$

et par suite, si μ' est supposé très petit, décroissent en progression géométrique suivant la loi approximative $e^{-\mu t}$.

De même l'angle ψ, dont la tangente est égale à $\frac{N_y}{N_x}$ est soumis à des fluctuations.

Dans le rapport $\frac{N_y}{N_x}$, on peut haut et bas diviser par $e^{-\alpha t}$, et il ne reste plus d'autre facteur exponentiel que $e^{(\alpha-\alpha')t}$, lequel varie relativement lentement.

Je ne pousserai pas plus loin cette étude générale.

J'aborde la description de quelques cas particuliers.

Supposons que, pour $t = 0$, on doive avoir

$$y = 0, \qquad y' = 0.$$

On voit alors immédiatement qu'on doit avoir

$$\frac{A}{\sin\varphi'} = \frac{A'}{\sin\varphi}$$

et

$$-2\mu' \sin\varphi \sin\varphi' - \Omega \sin(\varphi - \varphi') + \Omega' \sin(\varphi + \varphi') = 0.$$

Si donc Ω' et μ' sont de très petites quantités, on aura $\varphi = \varphi'$. C'est ce que nous allons supposer.

J'aurai donc

$$y = C[e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi) - e^{-\alpha' t}\sin(\omega' t + \varphi)].$$

Dans le cas particulier où l'on a $\alpha = \alpha'$, $\omega = \omega'$, cette formule donnerait pour y une valeur nulle, si C ne devenait pas infini en même temps. Faisons donc $\omega = \omega'$, puis faisons tendre α vers α', il viendra

$$y = C\sin(\omega t + \varphi)\left[e^{\alpha t} - \left(e^{-\alpha t} + \frac{d}{d\alpha}e^{-\alpha t}\,d\alpha\right)\right]$$

Digitized by Google

ou

$$y = C \sin(\omega t + \varphi) t \, d\alpha \, e^{-\alpha t} = D \sin(\omega t + \varphi) t \, e^{-\alpha t},$$

en appelant D la limite finie de $D \, d\alpha$, quand $d\alpha$ tend vers zéro. Mais pour que y, développé suivant les puissances de t, commence par un terme en t^2, il faut poser $\varphi = 0$.

On a alors à étudier

$$y = D t e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi).$$

Je pose

$$u = D t e^{-\alpha t}, \quad \frac{du}{dt} = D e^{-\alpha t}(1 - \alpha t),$$

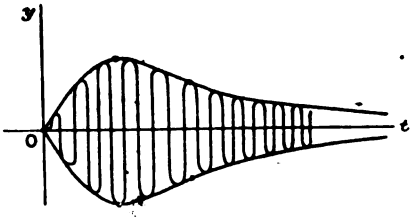
et

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = D e^{-\alpha t}(-\alpha) - \alpha D e^{-\alpha t}(1 - \alpha t) = -\alpha D e^{-\alpha t}(2 - \alpha t).$$

On voit donc que u' s'annule pour $t_1 = \frac{1}{\alpha}$ et u'' pour $t_2 = 2t$. Donc la courbe de u en fonction du temps atteint son maximum au temps $t_1 = \frac{1}{\alpha}$ et a son point d'inflexion au temps $t_2 = 2t$.

Traçons donc les courbes $u = + D t e^{-\alpha t}$, d'après ces indications.

Fig. 77.



La courbe de y en fonction du temps a alternativement sur ces deux courbes les points correspondant à $\omega t = k\pi$; ces points sont équidistants; les points pour lesquels y' s'annule ne sont pas équidistants, ce sont les racines de l'équation transcendante

$$\operatorname{tang} \omega t = -\frac{\omega t}{1 - \alpha t};$$

elles tendent à être équidistantes pour t infini.

Le cas où l'on a $\omega = \omega'$, mais avec des amortissements différents, amène à considérer la fonction

$$y = D(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha' t}) \sin \omega t.$$

Digitized by Google

dont l'allure est toute semblable.

Si je pose

$$u = D(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha' t})$$

u passe par un maximum au temps

$$t_1 = -\frac{1}{\alpha - \alpha'} \log \frac{\alpha'}{\alpha}$$

et a son point d'inflexion au temps

$$t_2 = 2t_1.$$

Enfin, si les amortissements sont égaux, on a à considérer la courbe

$$y = De^{-\alpha t} \sin \frac{\omega - \omega'}{2} t \cos\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t + \varphi\right).$$

La courbe

$$u = De^{-\alpha t} \sin \frac{\omega - \omega'}{2} t$$

a une forme que nous avons déjà étudiée à propos de la charge du condensateur. Comme la pulsation $\frac{\omega + \omega'}{2}$ est grande, c'est à intervalles équidistants très rapprochés que la courbe (y) rencontrera la courbe (u).

L'amplitude u passe périodiquement par zéro, et y s'annule alors également.

Ces remarques suffisent à déterminer l'allure générale de y.

En dehors de ces cas particuliers, il y aura lieu de se reporter aux généralités du début.

COURBES DE RÉSONANCE.

Nous avons obtenu, dans la théorie de la détermination du décrément d'un système à condensateur, les équations

$$j = \left(\frac{E}{4L}\right)^2 \times \frac{\alpha + \alpha_1}{\alpha\alpha_1} \times \frac{1}{(\omega - \omega_1)^2 + (\alpha + \alpha_1)^2},$$

$$j_r = \left(\frac{E}{4L}\right)^2 \times \frac{1}{\alpha\alpha_1(\alpha + \alpha_1)}.$$

1° On peut représenter ces résultats par une courbe.

Je pose, en appelant V la vitesse de propagation des ondulations

Digitized by Google

électriques,

$$\lambda = VT = V\frac{2\pi}{\omega}, \qquad \lambda_1 = VT_1 = V\frac{2\pi}{\omega_1},$$

$$x = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \qquad y = \frac{i}{i_r} = \frac{(\alpha+\alpha_1)^2}{(\omega-\omega_1)^2+(\alpha+\alpha_1)^2};$$

d'où

$$y = \frac{1}{1+\dfrac{\omega_1^2}{(\alpha+\alpha_1)^2}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}$$

ou

$$\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{\omega_1}\right)^2 = \frac{y}{1-y}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2.$$

On a

$$0 < y < 1.$$

Construisons la courbe. Pour toute valeur de y, il y a deux points dont les abscisses sont de la forme

$$\frac{1}{x'} = 1+\varepsilon, \qquad \frac{1}{x''} = 1-\varepsilon \qquad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{1-x'}{x'}, \\ \varepsilon = \dfrac{x''-1}{x''}, \end{cases}$$

que j'écrirai

$$x' = 1-a, \qquad x'' = 1+b.$$

Faisons $y = d$, il vient

$$\frac{\alpha+\alpha_1}{\omega_1} = \sqrt{\frac{d}{1-d}}\left(\frac{1}{1-a}-1\right) = \sqrt{\frac{d}{1-d}}\left(1-\frac{1}{1+b}\right)$$

ou

$$\frac{\alpha+\alpha_1}{\omega_1} = \sqrt{\frac{d}{(1-d)}\,\frac{ab}{(1-a)(1+b)}},$$

ou, en négligeant ab devant l'unité, si l'on est près de la résonance,

$$\frac{\alpha+\alpha_1}{\omega_1} = \sqrt{\frac{abd}{1-d}};$$

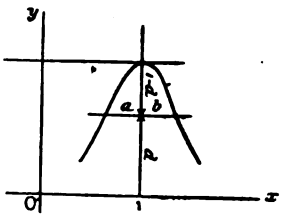
soient $\alpha T = 2\pi\delta$, $\alpha_1 T = 2\pi\delta_1$; on aura

$$\delta+\delta_1 = 2\pi\sqrt{\frac{abd}{1-d}}$$

Digitized by Google

et l'on remarquera que a, b, d et $1-d$ sont les quatre segments

Fig. 78.



interceptés en croix par la courbe et l'axe des x, sur les deux droites $y=d$, $x=1$.

2° On peut aussi poser

$$\frac{1}{j}=y, \qquad \omega_1-\omega=x,$$

d'où

$$y=\left(\frac{4L}{E}\right)^2\frac{\alpha\alpha_1}{\alpha+\alpha_1}[(\alpha+\alpha_1)^2+x^2].$$

C'est une parabole. Déplaçons les axes, en transportant l'axe des y au sommet, on a

$$y=\left(\frac{4L}{E}\right)^2\frac{\alpha\alpha_1}{\alpha+\alpha_1}x^2.$$

Le paramètre p est donné par

$$2p=\left(\frac{E}{4L}\right)^2\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha\alpha_1}\right).$$

L'ordonnée au sommet h est

$$h=\left(\frac{4L}{E}\right)^2\alpha\alpha_1(\alpha+\alpha_1),$$

d'où

$$\alpha+\alpha_1=\sqrt{2ph}.$$

Le tracé graphique, permettant de mesurer p et h, donnera $\alpha+\alpha_1$.

3° *Acuité de la résonance.* — Je pose

$$y=\frac{j}{j_r}, \qquad x=\frac{\omega_1-\omega}{\omega_1}.$$

Digitized by Google

J'aurai une courbe dont l'équation sera

$$y = \frac{1}{1 + \frac{\omega_1^2}{(\alpha + \alpha_1)^2} x^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{y} = 1 + \frac{x^2}{\left(\frac{\alpha + \alpha_1}{\omega_1}\right)^2},$$

d'où, en prenant les dérivées première et seconde,

$$-y' y^{-2} = \frac{2x}{\left(\frac{\alpha + \alpha_1}{\omega}\right)^2},$$

$$-y'' y^{-2} + 2y'^2 y^{-3} = \frac{2}{\left(\frac{\alpha + \alpha_1}{\omega}\right)^2}.$$

Mais au sommet, on a

$$x = 0, \qquad y = 1, \qquad y' = 0.$$

Donc la courbure qui a pour expression générale

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

se réduit en ce point à y'' et l'on a

$$y'' = \frac{8\pi\varepsilon}{(\delta_1 + \delta_2)}.$$

Ainsi l'acuité de la résonance, qui est d'autant plus grande que le rayon de courbure sera plus petit, sera d'autant plus accusée que la somme des décréments sera plus faible et les oscillations moins amorties.

Digitized by Google

CHAPITRE XXII.

CAPACITÉ ET INDUCTION.

En vue des calculs d'accouplement, je donne le calcul du coefficient d'induction mutuelle de deux circuits circulaires.

Après quelques considérations générales sur les coefficients d'induction, je calcule le coefficient de self-induction d'une ligne à double fil.

Les postes radiotélégraphiques recevant souvent le courant de la distribution d'énergie sous forme de courant triphasé, je calcule la capacité par unité de longueur d'un câble de ce genre.

Je rappelle les formules de la puissance fournie à un récepteur triphasé.

J'étudie ensuite la façon dont se comportent les capacités en alternatif.

Je rends compte de l'effet dit de bouchon.

Enfin j'examine les systèmes de Boucherot, où une force électromotrice efficace constante engendre, dans une autre branche, une intensité efficace constante.

COEFFICIENT D'INDUCTION MUTUELLE DE DEUX CIRCUITS CIRCULAIRES.

Les deux circuits sont situés dans des plans parallèles et la ligne des centres OO′ est perpendiculaire à chacun de ces plans.

Cela admis, soient :

b la longueur de la ligne des centres OO′ ;

A, a les rayons des deux cercles ;

ds, ds' deux éléments linéaires des circonférences considérées ;

φ et φ' les angles au centre correspondants comptés dans le même sens autour de OO′, à partir d'une origine fixe arbitraire ;

Digitized by Google

r la distance des éléments ds, ds' ;

$\varepsilon = \varphi - \varphi'$ l'angle des deux éléments ;

$r_1 = \sqrt{(A+a)^2+b^2}$ la plus grande distance d'un point d'un cercle à un point de l'autre ;

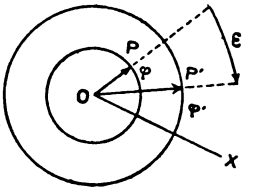
$c = \frac{2\sqrt{Aa}}{r_1}$ les quantités r_1 et c étant introduites pour la commodité des calculs ultérieurs ;

M le coefficient d'induction mutuel cherché.

On aura :

$$ds = A\,d\varphi, \qquad ds' = a\,d\varphi', \qquad r = \sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos(\varphi - \varphi')}$$

Fig. 79.



et

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} Aa\,\frac{\cos\varepsilon}{r}\,d\varphi'.$$

Mais il est clair que l'intégrale en φ' est indépendante de l'origine des arcs φ' ; il suffit que l'on fasse un tour dans le sens positif autour de la circonférence. Dans ces conditions, ε variera de o à -2π. Si l'on conserve les mêmes limites o et 2π, on peut écrire

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varepsilon\,d\varphi'}{r} = +\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varepsilon\,d\varepsilon}{r}.$$

Intégrant par rapport à φ, il vient

$$M = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varepsilon}{r} Aa\,d\varepsilon.$$

Mais on a identiquement

$$\frac{-2Aa\cos\varepsilon}{\sqrt{r_1^2 - 2Aa(1+\cos\varepsilon)}} = \frac{r_1^2 - 2Aa(\cos\varepsilon+1) - r_1^2 + 2Aa}{\sqrt{r_1^2 - 2Aa(1+\cos\varepsilon)}},$$

Digitized by Google

d'où

$$-M=\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{r_1^2-2Aa(1+\cos\varepsilon)}\,d\varepsilon$$
$$-(r_1^2-2Aa)\pi\int_0^{2\pi}\frac{d\varepsilon}{\sqrt{r_1^2-2Aa(1+\cos\varepsilon)}};$$

introduisons l'angle ψ défini par

$$\psi=\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2},$$

il vient

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{r_1^2-2Aa(1+\cos\varepsilon)}\,d\varepsilon=\int_0^{2\pi}r_1\sqrt{1-c^2\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon$$
$$=-2r_1\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}\,d\psi=4r_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

On aurait de même

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varepsilon}{\sqrt{r_1-2Aa(1+\cos\varepsilon)}}=\frac{4}{r_1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}}.$$

Je pose

$$F=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}},\qquad E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}\,d\psi,$$

et j'ai

$$-M=4\pi\left(\frac{1}{r_1}E-\frac{r_1^2-2Aa}{r_1}F\right).$$

Or, on a

$$\frac{1}{r_1}=\frac{2\sqrt{Aa}}{c},\qquad\frac{1}{r_1}-\frac{2Aa}{r_1}=\frac{2\sqrt{Aa}}{c}-\sqrt{Aa}\,c,$$

d'où

$$-M=4\pi\sqrt{Aa}\left[\frac{2}{c}E-\left(\frac{2}{c}-c\right)F\right]$$

avec

$$F=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_1^{\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\right]^2c^{2n}\right\},$$
$$E=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_1^{\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\right]^2\frac{c^{2n}}{2n-1}\right\}.$$

Digitized by Google

F et E sont les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce.

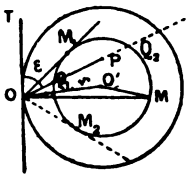
Dans l'édition anglaise de Maxwell (p. 310), édition 1881, on trouve pour M la même expression, changée de signe; mais les développements de F et de F′ permettent de voir qu'on a alors une quantité négative. Il faut donc s'en tenir au signe que nous venons de donner, lequel est d'accord avec *Kapazitæt and Induktivitæt* du Dr Ernest Orlich.

FORMULE APPROXIMATIVE.

CAS DE DEUX CIRCUITS CIRCULAIRES VOISINS DE DIAMÈTRES PEU DIFFÉRENTS.

1° Supposons les concentriques, dans le même plan. Soit OT la

Fig. 80.



tangente en O, P un point à l'intérieur de la surface limitée par le grand cercle, r et ε ses coordonnées polaires, $H\,ds$ l'intensité du champ magnétique due en P à l'élément ds. On aura

$$M = \int ds \int H r\, d\varepsilon\, dr = \int ds \int \frac{\sin\varepsilon}{r^2} r\, dr\, d\varepsilon = \int_{\bigcirc} ds \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sin\varepsilon\, d\varepsilon \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

avec

$$r_1 = OQ_1, \qquad r_2 = OQ_2,$$
$$\varepsilon_1 = M_1OT, \qquad \varepsilon_2 = M_2OT.$$

Q_1 et Q_2 étant les intersections de OP avec la petite circonférence, OM_1 et OM_2 étant les tangentes menées de O à cette circonférence.

Soit M un point quelconque de la circonférence intérieure.

On a, dans le triangle OMO′, en faisant $OM = x$,

$$a^2 = A^2 + x^2 + 2xA\sin\varepsilon.$$

Si $A - a = e$ est infiniment petit, il y a une racine r_1 infiniment petite; si l'on néglige r_1^2, il vient

$$r_1 = \frac{(a-A)(a+A)}{2rA\sin\varepsilon} = \frac{e}{\sin\varepsilon},$$

sensiblement.

Digitized by Google

L'autre racine r_2 est, d'après la valeur du produit des racines :

$$r_2 = \frac{A^2 - a^2}{r_1} = (A + a)\frac{e}{r_1} = 2a \sin\varepsilon,$$

sensiblement.

D'où

$$M = 4\pi a \int_{\varepsilon_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varepsilon \, d\varepsilon \log\left(\frac{2a}{e}\sin^2\varepsilon\right).$$

Appliquons l'intégration par parties.

On a

$$\left[-\cos\varepsilon \log\left(\frac{2a}{e}\sin^2\varepsilon\right)\right]' = \sin\varepsilon \log\left(\frac{2a}{e}\sin^2\varepsilon\right) - 2\frac{\cos^2\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}\sin\varepsilon.$$

D'autre part, j'ai, en faisant $\cos\varepsilon = x$,

$$-\int \frac{\cos^2\varepsilon}{\sin^2\varepsilon} d\cos\varepsilon = \int \frac{-x^2}{1-x^2} dx = \int \frac{1-x^2-1}{1-x^2} dx = x + \frac{1}{2}\log\frac{1-x}{1+x},$$

d'où

$$\int \frac{\cos^2\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}\sin\varepsilon \, d\varepsilon = \cos\varepsilon + \frac{1}{2}\log \operatorname{tang}^2\frac{\varepsilon}{2}.$$

L'expression de M devient

$$M = 4\pi a \left| -\cos\varepsilon \log\left(\frac{2a}{e}\sin^2\varepsilon\right) + 2\cos\varepsilon + \log\operatorname{tang}^2\frac{\varepsilon}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

A la limite supérieure, l'expression s'annule. A la limite inférieure, nous tiendrons compte de la petitesse de ε, car on a

$$A\cos\varepsilon_1 = a,$$

et comme A est très voisin de a, ε_1 doit être voisin de zéro; on a

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{2e}{a}},$$

sensiblement.

On peut grouper les termes comme suit :

$$-\cos\varepsilon \log\frac{2a}{e} + 2\cos\varepsilon - (\cos\varepsilon - 1)\log\sin^2\varepsilon - \log\frac{\sin^2\varepsilon}{\operatorname{tang}^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Digitized by Google

Or on a, pour $\varepsilon = 0$,

$$\lim \cos\varepsilon = 1,$$

$$\lim (\cos\varepsilon - 1) \log \sin^2\varepsilon = 0,$$

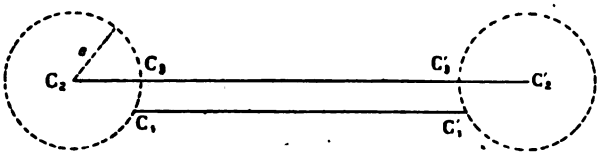
$$\lim \log \frac{\sin^2\varepsilon}{\tan g^2 \frac{\varepsilon}{2}} = \log 4.$$

Il reste donc

$$M = 4\pi a \left(\log \frac{8a}{e} - 2 \right).$$

2° Si les deux circonférences $(C_1 C_1')$, $(C_2 C_2')$, tout en restant très voisines, ne sont pas dans le même plan, la même formule s'appliquera

Fig. 81.



en appelant e la plus courte distance des deux courbes, parce que le flux d'épaisseur e qui entoure immédiatement $(C_2 C_2')$ ne traverse pas $(C_1 C_1')$. Il traverse dans le plan de $(C_2 C_2')$ le cercle $(C_3 C_3')$ dont le rayon est sensiblement a, si A et a diffèrent peu et si les plans $(C_1 C_1')$, $(C_2 C_2')$ sont voisins.

COEFFICIENTS D'INDUCTION.

Quand il s'agit de calculer pratiquement les coefficients d'induction les plus usuels, ce qui domine toute la question c'est la théorie de la moyenne distance géométrique (M.D.G.).

Le théorème fondamental est le suivant.

Soient :

O' un cercle, a' son rayon, O un point extérieur, $a = OO'$ la distance du point O au centre du cercle, r la distance OM, ω l'angle de O'M avec OO'.

L'élément de circonférence en M est $a' d\omega$, soit $f(r)$ une fonction de la distance OM telle que l'on ait

$$\int_0^{2\pi} f(r) a' \, d\omega = 2\pi a' f(a). \tag{1}$$

Digitized by Google

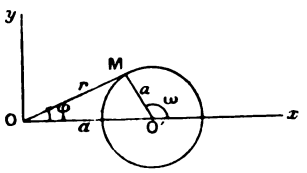
c'est-à-dire telle que la valeur moyenne de $f(r)$ soit égale à $f(a)$. On demande de trouver une fonction $f(r)$ satisfaisant à cette condition.

Cette équation s'écrira plus simplement :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r)\,d\omega = f(a). \tag{2}$$

Or, si $f(z)$ est une fonction de $z = x + yi$ uniforme, finie et continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur du contour d'intégration,

Fig. 82.



qui contourne le point z_0 du plan des imaginaires, on a d'après un théorème de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\bigcirc}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0). \tag{3}$$

Je pose ici

$$z_0 = a, \qquad z - a = a' e^{\omega\sqrt{-1}}, \tag{4}$$

et, en prenant la dérivée logarithmique de (4), j'ai

$$\frac{dz}{z-a} = \sqrt{-1}\,d\omega, \tag{5}$$

et l'intégrale (3) devient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,d\omega = f(a). \tag{6}$$

Séparons les parties réelles et les parties imaginaires, en posant

$$f(z) = P + Q\sqrt{-1}, \tag{7}$$

P et Q étant des fonctions de x et de y, qui satisfont à l'équation de Laplace, et nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\,d\omega = P_0, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q\,d\omega = Q_0. \tag{8}$$

Digitized by Google

Les équations (8) sont de la forme (2) et l'on pourra prendre P pour $f(r)$ si P ne dépend que de r.

Or P satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \tag{9}$$

qui exprime que le flux du gradient de P se conserve. Si P ne dépend que de r, ce gradient est

$$-\frac{dP}{dr},$$

dont le flux à travers la circonférence de rayon r est

$$-2\pi r\frac{dP}{dr}.$$

Si ce flux est égal à une constante $-2\pi C$, on a

$$\frac{dP}{dr} = \frac{C}{r}, \tag{10}$$

d'où, en intégrant,

$$P = B\log r + C'. \tag{11}$$

En prenant

$$P = \log r,$$

j'aurai donc

$$\int_0^{2\pi} \log r\, d\omega = 2\pi \log a. \tag{12}$$

La fonction Q conjuguée de P est φ, à une constante près, et j'ai, par suite,

$$f(z) = \log r + \sqrt{-1}\,\omega = \log z. \tag{13}$$

Pour que $\log z$ n'ait pas de point critique à l'intérieur du contour d'intégration, il faut que le point O soit extérieur au cercle, c'est-à-dire qu'on ait

$$a > a'$$

comme nous l'avons supposé. On a alors

$$\int_0^{2\pi} \log\sqrt{a^2 + a'^2 + 2aa'\cos\omega}\, d\omega = 2\pi \log a. \tag{14}$$

Digitized by Google

Or, dans le premier membre de (14), a et a' entrent symétriquement, et rien ne les distingue que le seul point, qui vient d'être indiqué, $a > a'$.

Si donc on avait $a < a'$, les rôles de a et de a' seraient inversés, et l'on aurait

$$(15) \qquad a < a', \qquad \int_0^{2\pi} \log\sqrt{a^2 + a'^2 + 2aa'\cos\omega}\, d\omega = 2\pi \log a'.$$

Donc, si le point O est à l'intérieur du cercle, on a

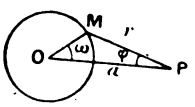
$$\int_0^{2\pi} \log r\, d\omega = 2\pi \log a',$$

au lieu de l'équation (14).

On peut se proposer de trouver toutes les fonctions telles que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r)\, d\omega = f(a).$$

Fig. 83.



Or, cette équation entraîne, par dérivation,

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(r)\frac{\partial r}{\partial a}\, d\omega = f'(a).$$

Mais on a

$$r^2 = (a - x)^2 + y^2,$$

d'où

$$r\frac{\partial r}{\partial a} = a - x,$$

ou, d'après la figure,

$$(3) \qquad \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{a - x}{r} = \cos \mathrm{MPO} = \cos\varphi,$$

et l'équation proposée (2) devient

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(r)\cos\varphi\, d\omega = f'(a).$$

Digitized by Google

ou, en multipliant et divisant par r le terme à intégrer,

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (rf')\frac{\cos\varphi}{r}\,d\omega = f'(a).$$

Mais cette équation doit encore avoir lieu quand le point P vient sur la circonférence. Je poserai alors $a\,d\omega = ds$, ds étant l'élément d'arc de circonférence et

$$\sigma_M = r f'(r), \quad \sigma_P = a f'(a);$$

j'aurai alors, pour (5),

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_C \sigma_M \frac{\cos\varphi}{r}\,ds = \sigma_P.$$

Mais cette équation fonctionnelle (6) est celle qui détermine la densité électrique en équilibre sur un cylindre conducteur de révolution. On a donc, C étant une constante, par rapport à PM, ou r,

$$(7) \qquad \sigma = C,$$

et il n'y a pas d'autre solution, d'où

$$(8) \qquad rf' = C$$

ou

$$(9) \qquad f' = \frac{C}{r}, \qquad f = C\log r + C'.$$

Telle est la forme nécessaire de la fonction f si elle se comporte à l'infini comme le logarithme de la distance.

COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION DE DEUX CONDUCTEURS CYLINDRIQUES PARALLÈLES, A BASE CIRCULAIRE.

Considérons un conducteur cylindrique de rayon a_1. A une distance r de l'axe, si l'on a $r > a_1$, le champ magnétique H a pour valeur, régime permanent :

$$H_e = \frac{2I}{r}.$$

A l'intérieur du conducteur, on a $r < a$ et le champ magnétique a pour valeur

$$H_i = 2I\frac{r}{a_1^2}.$$

Digitized by Google

Si μ est la perméabilité du milieu, l'induction magnétique B sera égale à μH_e à l'extérieur; si μ_1 est la perméabilité de la substance du conducteur, l'induction magnétique y sera $\mu_1 H_i$. Si le milieu extérieur est de l'air, μ est une constante que l'on prend égale à l'unité. Si la substance du conducteur est du cuivre, μ_1 pourra aussi sans inconvénient être pris égale à l'unité. Si la substance est ferromagnétique, μ_1 sera variable avec H_i; on ne pourra donc considérer μ_1 comme une constante que si l'on a pris pour μ_1 une valeur moyenne dépendant de l'intensité totale I. Si dans le voisinage se trouvent d'autres conducteurs parallèles, la valeur de μ_1 devra de ce chef être légèrement modifiée, et de plus la distribution des lignes de flux d'induction magnétique ne pourra plus être considérée comme circulaire, même si par la pensée l'on n'envisage que celles qui sont dues au courant I. Le champ H_i aura toujours une distribution circulaire, mais l'inégale répartition de la perméabilité due à l'aimantation induite par les courants voisins empêchera la ligne d'induction correspondante d'être circulaire autour du même axe. Si cependant le champ dû aux conducteurs parallèles voisins est assez faible, on pourra admettre que la valeur de μ_1 est celle qui dépend du courant I seul. C'est dire qu'on néglige la réfraction des tubes de flux, dus au champ de ces conducteurs voisins, et que par suite on admet qu'à l'intérieur de ce conducteur le champ des conducteurs voisins y est le même que si la substance du conducteur était identique à celle du milieu ambiant.

Pour éviter toute complication, nous ferons ces hypothèses : au point de vue du champ produit par le courant qui le traverse, le conducteur sera censé avoir une perméabilité μ_1 constante bien définie; au point de vue du champ produit par les courants qui circulent dans d'autres conducteurs parallèles voisins, il n'opérera aucune déviation sensible des tubes de flux d'induction et sera censé avoir la perméabilité μ du milieu ambiant.

Ces préliminaires posés, considérons deux conducteurs cylindriques parallèles, l'un de rayon a_1, l'autre de rayon a_2, dont les axes soient à la distance d.

Le coefficient de self-induction d'un circuit est le flux d'induction moyen qui le traverse, quand il est parcouru par un courant égal à l'unité. Le coefficient est positif quand on prend le flux qui pénètre par la face négative d'un feuillet bordé par le circuit. Ici, il s'agit simplement du coefficient par unité de longueur.

Digitized by Google

On peut dire aussi que l'énergie d'un circuit parcouru par un courant I est

$$W = \frac{1}{2} LI^2,$$

et c'est cette expression de l'énergie qui nous sert de définition pour le coefficient L. Nous supposons le régime établi et le courant I constant.

Or, cette énergie a d'une façon générale pour expression

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_U \mu H^2 \, d\varpi,$$

$d\varpi$ étant l'élément de volume du champ et μ étant la perméabilité en ce point. Cette expression peut être transformée de bien des manières, et la méthode employée par Maxwell pour le calcul de L introduit le potentiel vecteur. Je vais suivre ici la méthode qui est indiquée par Vaschy et qui est incomparablement plus simple.

On décompose le volume U en tubes élémentaires de flux d'induction magnétique. Soient dS la section variable d'un tel tube de flux et ds son élément de longueur, on aura

$$d\varpi = d\mathrm{S}\, ds.$$

D'autre part, le magnétisme ne pouvant exister sous forme de charges magnétiques vraies, le flux d'induction magnétique est constant le long d'un tube de flux, et ces tubes se referment sur eux-mêmes.

Si donc on envisage un tube de flux d'induction, on peut faire sortir $\frac{\mu H \, d\mathrm{S}}{4\pi}$ du signe d'intégration et l'intégrale portera sur $H\,ds$. On aura d'ailleurs, par définition, pour le courant embrassé par le tube d'induction envisagé,

$$\frac{1}{4\pi} \int H \, ds = i,$$

i étant la somme des intensités des filets de courant embrassés par le tube de flux. On aura donc

$$2W = LI^2 = \int_s \mu H \, d\mathrm{S} \int \frac{H \, ds}{4\pi} = \int \mu H \, d\mathrm{S} i,$$

l'intégrale étant étendue à une surface S transversale, simple ou com-

Digitized by Google

posée, qui traverse tous les tubes d'induction. Le courant I étant supposé égal à l'unité, on aura donc L en multipliant chaque flux élémentaire par la fraction i du courant total embrassé, et faisant la somme pour tous les tubes de flux.

Quand on a affaire à un système cylindrique, ce qu'on demande, c'est le coefficient L par unité de longueur. Le volume U à considérer est alors compris entre deux plans transversaux distants l'un de l'autre d'une longueur égale à l'unité.

Les quantités μ et μ_1 étant considérées comme des constantes, le flux d'induction en un point est le flux résultant des deux flux composants dus respectivement au courant $+1$ du conducteur d'aller (a_1) et au courant -1 du conducteur de retour (a_2).

Les lignes de forces magnétiques dues au courant I sont des parallèles décrits autour de l'axe de révolution $A_1 B_1$ de (a_1). Le courant de retour donne de même des parallèles autour de l'axe $A_2 B_2$ de (a_2), lesquels pénètrent dans le feuillet A_1, B_1, A_2, B_2 par la même face.

Considérons séparément le champ dû au conducteur d'aller dans l'hypothèse de I égal à l'unité.

Il y a un flux à l'intérieur de la substance du conducteur (a_1) et un flux à son extérieur.

Calculons le flux intérieur.

Les tubes élémentaires situés à une distance ρ de l'axe et d'épaisseur $d\rho$, ont ensemble, pour l'unité de longueur du système, une section totale de surface $1 \times d\rho$ et ils embrassent un courant I d'intensité $\frac{\rho^2}{a_1^2}$; la force magnétique y a pour valeur $\frac{2i}{\rho}$. L'élément différentiel correspondant de l'intégrale à calculer est $\frac{2\rho^3 d\rho}{a_1^2}$. L'intégration de o à a donne $\frac{1}{2}$ pour résultat.

Si l'on met en évidence la perméabilité magnétique de μ_1 de la substance du fil $A_1 B_1$, on écrira pour le flux d'induction

$$\frac{1}{2}\mu_1$$

au lieu de $\frac{1}{2}$.

Mais je rappelle que, si la substance est magnétique, il faudrait, en bonne justice, tenir compte de l'action magnétisante du courant de retour, et alors les lignes d'induction cesseraient d'être des cercles. Si donc la perméabilité varie avec l'intensité du champ, la quan-

Digitized by Google

tité μ_1 n'est qu'une sorte de valeur moyenne entre les diverses valeurs de la perméabilité que nous faisons ainsi sortir du signe d'intégration.

Je passe au champ extérieur. A cet effet, soit $-J_1$ l'intensité d'un filet du courant dans le fil de retour, on peut considérer ce filet comme le prolongement d'un courant $+J_1$ uniformément réparti dans la section du fil d'aller. Soit d_1 la distance du filet $-J_1$ à l'axe A_1B_1, le flux d'induction extérieur au conducteur A_1B_1 et dû à ce courant $+J_1$, s'il est étendu jusqu'au filet $-J_1$, sera

$$J_1 \int_{a_1}^{d_1} \frac{2\,dr}{r} = 2J_1 \log \frac{d_1}{a_1}.$$

D'autre part, si nous faisons la sommation par rapport à tous les filets équidistants de l'axe A_2B_2 et ensuite par rapport à tous les tubes de courant ainsi obtenus, nous aurons, d'après la théorie du potentiel logarithmique,

$$\Sigma J_1 \log d_1 = \log d \times \Sigma J_1 = \log d,$$

puisque l'on a

$$\Sigma J_1 = 1.$$

Le flux d'induction est donc

$$2\mu \log \frac{d}{a_1},$$

en mettant en évidence la perméabilité μ du milieu. En toute rigueur, μ ne conservera pas cette valeur pour la portion du tube d'induction qui pénètre dans la substance du fil de retour. Mais la perméabilité du fil de retour est déterminée principalement par l'intensité du fil de retour lui-même, et par suite, le fil d'aller exerçant une action aimantante négligeable, le fil de retour se comporte comme si sa perméabilité était celle du milieu ambiant, puisqu'il ne produit aucune réfraction sensible des tubes de flux.

Opérons maintenant pour le fil A_2B_2 comme nous l'avons fait pour le fil A_1B_1 et nous aurons

$$\frac{1}{2}\mu_2 + 2\mu \log \frac{d}{a_2}$$

pour la portion correspondante de l'énergie magnétique $2W$ que nous calculons.

Digitized by Google

Il vient donc, en définitive,

$$L = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) + 2\mu \log \frac{d^2}{a_1 a_2}.$$

Dans le procédé de calcul que nous avons employé, nous avons séparé le champ en deux composantes, l'une due au courant d'aller, l'autre due au courant de retour.

L'intensité du champ est la résultante de ces deux composantes. L'intensité de l'induction magnétique n'est la résultante des deux intensités d'induction magnétique correspondantes que si la perméabilité magnétique peut être considérée comme une constante.

Ajoutons que les diverses restrictions que nous avons indiquées pour la validité de la formule s'appliquent également au mode de démonstration adopté par Maxwell.

Le coefficient de self-induction L que nous venons de calculer est tel que

$$-L\frac{dI}{dt}$$

est la force électromotrice de self-induction moyenne.

En effet, on a d'une façon générale, pour $\mu = 1$,

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{1}{4\pi I}\int\left(H\frac{dH}{dt}\right)d\varpi.$$

ou, en appelant A le potentiel vecteur,

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{1}{I}\int\left(\frac{H}{4\pi}\frac{d\,\mathrm{rot}\,A}{dt}\right)d\varpi = \frac{1}{I}\int\left(\frac{H}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\frac{dA}{dt}\right)d\varpi.$$

Supposons le champ nul à l'infini, en intégrant par parties, il vient

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{1}{I}\int\left(\frac{dA}{dt}\,\mathrm{rot}\,\frac{H}{4\pi}\right)d\varpi = \frac{1}{I}\int\left(\frac{dA}{dt}\,i\right)d\varpi;$$

i étant le vecteur courant. Considérons un système cylindrique; soit L le coefficient par unité de longueur; décomposons le volume en filets de courant, soit $d\Sigma$ la section d'un filet; supposons que la longueur du filet soit égale à l'unité, on aura L par unité de longueur en écrivant :

$$-L\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{I}\int\left(\frac{dA}{dt}\,i\right)d\Sigma.$$

Digitized by Google

Supposons maintenant que la densité de courant i soit uniforme dans la section. Alors $\frac{dA}{dt}$ sera la force électromotrice s'exerçant dans le filet $i\,d\Sigma$ et

$$-L\frac{dI}{dt} = -\int\left(\frac{dA}{dt}\times\frac{i\,d\Sigma}{I}\right)$$

sera la force électromotrice moyenne.

Il importe de remarquer que A, variant suivant la distance à l'axe A_1B_1, ne peut pas être considéré comme constant dans la section, même si l'on se place dans le cas le plus simple d'un seul conducteur cylindrique et d'un courant parvenu à l'état permanent, c'est-à-dire uniformément réparti dans la section.

CAPACITÉ PAR UNITÉ DE LONGUEUR DU CÂBLE TRIPHASÉ.

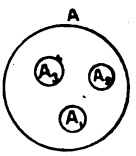
1° Coefficients de Maxwell.

Soient :

A_0 une enveloppe métallique (nombre périphractique un);

$A_1\,A_2\,A_3$ trois conducteurs (nombre périphractique un), extérieurs les uns aux autres, intérieurs à A_0;

Fig. 84.



$Q_0\,Q_1\,Q_2\,Q_3$, $V_0\,V_1\,V_2\,V_3$ les charges et les potentiels de ces surfaces.

a. Comme tous les tubes de force électrique émanés de l'un quelconque des conducteurs doivent se terminer sur les autres, en vertu de la propriété solénoïdale, on a

$$\Sigma Q = 0. \tag{1}$$

b. Comme on peut, sans modifier la distribution, augmenter tous les potentiels d'une quantité donnée en chargeant la surface externe de A_0, les charges Q déterminent, non les valeurs absolues des V,

Digitized by Google

mais leurs valeurs relatives, et l'on peut pour simplifier faire

$$V_0 = 0. \tag{2}$$

c. En vertu du principe de superposition, on a

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + c_{13}V_3, \\ Q_2 &= c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + c_{23}V_3, \\ Q_3 &= c_{31}V_1 + c_{32}V_2 + c_{33}V_3. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ce sont les équations de Maxwell.

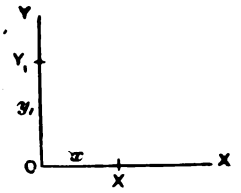
Les c_{11}, c_{22}, c_{33} sont les capacités.

Les $c_{12} = c_{21}$, etc., sont les coefficients d'influence électrostatique.

2° Systèmes cylindriques.

Cherchons le potentiel en un point X $(x, 0)$ dû à une droite OY_1

Fig. 85.



($OY_1 = y_1$) chargée d'électricité, avec la densité linéaire un.

On aura pour le potentiel V

$$V = \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ou

$$V = \frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{arc\,sin} \frac{y_1\sqrt{-1}}{x}. \tag{5}$$

Utilisons la formule

$$\sin\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \tag{6}$$

et résolvons par rapport à α, il vient

$$V = -\log x + \log\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 + x^2}\right) \tag{7}$$

ou

$$V = -\log x + \log 2y_1(1+\varepsilon) = -\log x + \log 2y_1 + \varepsilon. \tag{8}$$

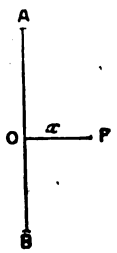
Digitized by Google

ε ayant pour valeur principale $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y_1}\right)^2$; donc ε sera négligeable si y_1 est assez grand par rapport à x pour que du point X on voie OY_1 sous un angle voisin de $\frac{\pi}{2}$. On aura alors

$$V = -\log x + \text{const.} \tag{9}$$

Conséquence. — Soient AB une droite chargée uniformément avec

Fig. 86.



la densité un, P un point situé à une distance x de AB et dans une position telle qu'on voie AB sous un angle voisin de π.

Alors on aura sensiblement pour potentiel en P

$$V = -2\log x + \text{const.} \tag{10}$$

ou si l'on veut, par analogie à la formule $V = \Sigma\frac{m}{r}$, on écrira

$$V = 2\log\frac{1}{x} + \text{const.} \tag{11}$$

3° *Vérification.* — C'est dans ces conditions seulement qu'on peut considérer la force agissant sur P et émanant de la droite AB comme dirigée suivant le prolongement de la plus courte distance OP.

Considérons le cylindre coaxial de rayon x et deux bases qui le tronquent, à la distance un l'une de l'autre. Soient E la force électrique, k le pouvoir inducteur électrique; $\frac{kE}{4\pi}$ est le déplacement. Écrivons que la quantité d'électricité incluse est égale au flux de déplacement à travers la surface, on a

$$2\pi x\frac{kE}{4\pi} = 1 \qquad \text{ou} \qquad kE = \frac{2}{x}. \tag{12}$$

Digitized by Google

Or, on a

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x}; \tag{13}$$

d'où

$$V = \frac{2}{k}\log\frac{1}{x} + \text{const.} \tag{14}$$

Si le milieu diélectrique était de l'air, on aurait

$$k_0 = \frac{1}{v_0^2}, \tag{15}$$

v_0 étant la vitesse de la lumière (relation de Maxwell) en centimètres par seconde.

Si le pouvoir diélectrique est ε fois celui de l'air, on aura

$$V = \frac{2v_0^2}{\varepsilon}\log\frac{1}{x} + \text{const.}; \tag{16}$$

V est alors mesuré en unités électromagnétiques (C. G. S.).

L'accord de (16) et de (11) se fait, en remarquant que, dans l'expression (11) qui résulte de (4), j'ai employé les unités électrostatiques et supposé que le pouvoir inducteur du milieu était l'unité.

4° *Potentiel logarithmique.* — Considérons (n) points chargés; appelons V le potentiel en un point P. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les distances de P aux n masses $q_1, q_2, \ldots, q_n$ placées aux points donnés $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On aura

$$V = \frac{2v_0^2}{\varepsilon}\Sigma q\log\frac{1}{r} + \text{const.} \tag{17}$$

Je décris autour de A_1 un petit cercle de rayon a, j'aurai pour potentiel en un point quelconque M de ce petit cercle

$$V = \frac{2v_0^2}{\varepsilon}\left(q\log\frac{1}{a} + \sum_2^n q_i\log\frac{1}{r_i} + \text{const.}\right) \tag{18}$$

ou

$$V = \frac{2v_0^2}{\varepsilon}\left(q\log\frac{1}{a} + \sum_2^n q_i\log\frac{1}{d_i} + \eta_1 + \text{const.}\right), \tag{19}$$

en appelant d_i la distance $A_i A_0$. Et l'on aura pour η_1 la valeur prin-

Digitized by Google

cipale

$$\eta_1 = \sum \frac{d_i - r_i}{r_i}; \tag{20}$$

d'où

$$\eta_1 < \sum \frac{a}{d_i - a}. \tag{21}$$

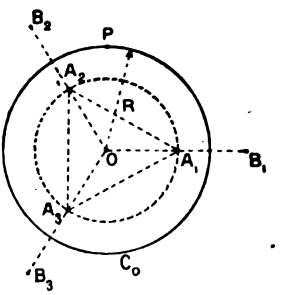
Si donc, de chacun des points A_i, on voit les cercles de garde de rayon a décrits autour des autres points donnés comme centres sous un angle négligeable, $|\eta_1|$ sera aussi négligeable et le potentiel V sera constant sur chacun de ces cercles.

5° *Câble triphasé*. — Lemmes géométriques. — *a*. On a vu par la formule (14) que l'on peut substituer à un système cylindrique de droites chargées un système plan; si q est la charge par unité de longueur, cette charge intervient dans la valeur du potentiel par le terme

$$2q \log \frac{1}{r} \qquad (\varepsilon = 1).$$

b. Soient O le centre de l'enveloppe, R son rayon, A_1, A_2, A_3, les centres des trois conducteurs cylindriques intérieurs, a la grandeur

Fig. 87.



commune de leurs rayons; les points A_1, A_2, A_3 forment un triangle isoscèle. La distance des sommets au centre est b.

Les points B_1, B_2, B_3 sont conjugués harmoniques de A_1, A_2, A_3 par rapport au cercle de section de l'enveloppe.

On a donc

$$OB_1 = \frac{R^2}{b} \tag{22}$$

Digitized by Google

et

$$OB_2 = OB_3 = \frac{R^2}{b},$$

également.

On aura

$$(23)\quad \begin{cases} A_1A_2 = b\sqrt{3}, \\ A_1B_2 = \sqrt{b^2 + \dfrac{R^4}{b^2} + R^2}, \\ A_1B_1 = \dfrac{R^2}{b} - b. \end{cases}$$

Enfin, si P est un point quelconque de la circonférence (C_0) de rayon R, on a

$$(24)\quad \frac{PA_1}{PB_1} = \frac{R - b}{\dfrac{R^2}{b} - R} = \frac{b}{R} = \frac{PA_2}{PB_2} = \frac{PA_3}{PB_3}.$$

c. Considérons les trois points A_1, A_2, A_3 comme chargés chacun de la charge q; et les trois points B_1, B_2, B_3 comme chargés chacun de la charge $-q$.

Le potentiel dû à ces masses sera, en un point P,

$$(25)\quad V = 2q \log \frac{r'_1 r'_2 r'_3}{r_1 r_2 r_3} + k$$

avec

$$PA_1 = r_1, \qquad PB_1 = r'_1,$$
$$PA_2 = r_2, \qquad PB_2 = r'_2,$$
$$PA_3 = r_3, \qquad PB_3 = r'_3.$$

En un point de C_0, V sera constant; il sera égal à zéro, si l'on détermine la constante k par l'équation

$$(26)\quad 0 = 2q \log \left(\frac{R}{b}\right)^3 + k.$$

d'où

$$(27)\quad V = 2q \log \left(\frac{b}{R}\right)^3 \frac{r'_1}{r_1} \frac{r'_2}{r_2} \frac{r'_3}{r_3}.$$

Enfin, V sera aussi sensiblement constant sur chacune des petites circonférences de centre A_1, A_2, A_3 et de rayon a.

Au point de vue de la distribution électrostatique, on peut remplacer les points extérieurs B_1, B_2, B_3 par l'enveloppe métallique (C_0).

En résumé, au câble triphasé nous pouvons inversement substituer le système des points A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3.

Digitized by Google

Que donnent les équations (3) de Maxwell?

Par symétrie, on a, dans le câble triphasé, avec les charges indiquées :

$$(28)\qquad \begin{cases} V_1 = V_2 = V_3, & c_{11} = c_{22} = c_{33} = c, \\ Q_1 = Q_2 = Q_3 = q, & c_{12} = c_{21} = c_{31} = \ldots = c'; \end{cases}$$

d'où

$$(29)\qquad q = (c + 2c')V_1$$

ou

$$(30)\qquad c + 2c' = \frac{V_1}{q}.$$

Portons le point P sur le cercle (a) entourant (A_1), on aura, d'après (27), en tenant compte de (23) et (24),

$$(31)\quad V_1 = 2q \log\left(\frac{b}{R}\right)^3 \frac{\left(\frac{R^2}{b} - b\right)\left(b^2 + \frac{R^4}{b^2} + R^2\right)}{a \times 3b^2} = 2q \log \frac{R^6 - b^6}{3aR^3b^2}.$$

d. Mettons maintenant sur les points A et B les charges suivantes :

$+q$	A_1	B_2
$-q$	B_1	A_2
o	A_3	B_3

Ici encore, le potentiel étant

$$(32)\qquad V = 2q \log \frac{r_2}{r_1}\frac{r'_1}{r'_2} + k,$$

on peut considérer le système de masses ponctuelles comme équivalent au câble triphasé avec enveloppe à la terre (potentiel zéro), à la condition de faire $k = 0$, puisque on a, sur le cercle (C_0),

$$(33)\qquad \frac{r_2}{r'_2} = \frac{b}{R}, \qquad \frac{r'_1}{r_1} = \frac{R}{b},$$

et qu'on doit par suite avoir, d'après (32), pour $V = 0$,

$$(34)\qquad 0 = 2q \log \frac{b}{R}\frac{R}{b} + k$$

ou $k = 0$.

Les petits cercles de base des conducteurs sont toujours sensiblement des courbes équipotentielles.

Digitized by Google

Que donnent les équations de Maxwell? Par symétrie, on aura

$$(35)\qquad \begin{cases} V_1 = -V_2, \quad V_3 = 0; \\ Q_1 = q, \quad Q_2 = -q, \quad Q_3 = 0, \end{cases}$$

et les équations (3) deviennent

$$(36)\qquad q = (c - c')V_1, \quad \ldots.$$

Utilisons les relations géométriques (23) et (24); il vient, d'après (32) et (34),

$$(37)\qquad V_1 = 2q \log \frac{b\sqrt{3}}{a} \frac{\left(\frac{R^2}{h} - b\right)}{\sqrt{b^2 + \frac{R^4}{b^4} + R^2}} = 2q \log \frac{b\sqrt{3}}{a} \frac{R^2 - b^2}{\sqrt{b^4 + R^2 b^2 + R^4}};$$

d'où

$$(38)\qquad c - c' = \frac{1}{2} \frac{1}{\log \frac{b\sqrt{3}}{a} \frac{R^2 - h}{\sqrt{b^4 + b^2 R^2 + R^4}}}.$$

En unités électromagnétiques, c et c' seront à multiplier par $\frac{\varepsilon}{\nu_0^2}$, comme il a été expliqué.

Les formules (30) et (38) permettent de calculer la capacité et le coefficient d'influence.

Mais il est préférable de modifier les formules de Maxwell en introduisant les combinaisons $c + 2c'$ et $c - c'$ à la place de c et de c'.

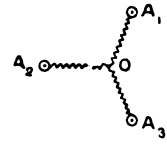
TRANSPORT DE FORCE TRIPHASÉ. MONTAGE EN ÉTOILE.

Montage en étoile.

Soient :

A_1, A_2, A_3 les points d'arrivées des trois conducteurs;
V_1, V_2, V_3 les potentiels en ces points;

Fig. 88.



V_0 le potentiel du point neutre;
I_1, I_2, I_3 les intensités des courants allant de A_1, A_2, A_3 vers zéro;

Digitized by Google

P la puissance instantanée en watts;
P_m la puissance moyenne, $\cos\varphi$ le facteur de puissance;
T la période.

Supposons les conducteurs également chargés. On a

$$P = I_1(V_1 - V_0) + I_2(V_2 - V_0) + I_3(V_3 - V_0).$$

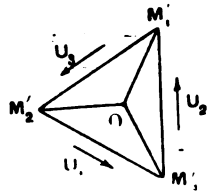
Je pose

$$u_1 = V_1 - V_0, \qquad u_2 = V_2 - V_0, \qquad u_3 = V_3 - V_0,$$

il vient

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T (I_1 u_1 + I_2 u_2 + I_3 u_3)\, dt = 3 I_{eff} u_{eff} \cos\varpi.$$

Fig. 89.



Construisons le diagramme des tensions. Je fais la convention que les vecteurs M'_1O, M'_2O, M'_3O représentent $V_1 - V_0$, $V_2 - V_0$, $V_3 - V_0$ et l'on a

$$gr\, M'_1 M'_2 = \sqrt{3}\, gr\, OM'_1$$

ou, en appelant

$$U_1 = V_2 - V_3, \qquad U_2 = V_3 - V_1, \qquad U_3 = V_1 - V_2$$

les tensions composées U_1, U_2, U_3, dont nous supposons les valeurs efficaces égales,

$$U_{eff} = \sqrt{3}\, u_{eff};$$

d'où

$$P_m = \sqrt{3}\, I_{eff} U_{eff} \cos\varphi.$$

Montage en triangle.

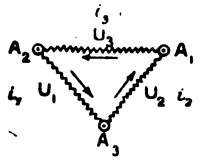
La même formule s'applique, ce cas se ramenant au précédent, de la manière ci-après.

Comptons toujours positivement I_1 I_2 I_3 dans le sens où elles viennent de la ligne vers le triangle; soient U_1 U_2 U_3, i_1 i_2 i_3 les

Digitized by Google

différences de potentiels et les intensités dans les côtés du triangle comptées positivement dans le sens indiqué par les flèches.

Fig. 90.



On aura

$$P = i_1 U_1 + i_2 U_2 + i_3 U_3.$$

Mais les équations de Kirchhoff relatives aux sommets A_1, A_2 donnent

$$i_1 = i_3 + I_2,$$
$$i_2 = i_3 - I_1;$$

d'où

$$P = (i_3 + I_2) U_1 + (i_3 - I_1) U_2 + i_3 U_3.$$

Mais, en faisant le tour du triangle, on a une différence de potentiel totale nulle, donc

$$U_1 + U_2 + U_3 = 0$$

et

$$P = I_2 U_1 - U_2 I_1.$$

Si V_1, V_2, V_3 sont les potentiels des points A_1, A_2, A_3, on a

$$U_1 = V_2 - V_3, \quad U_2 = V_3 - V_1,$$

d'où

$$P = I_2 (V_2 - V_3) - I_1 (V_3 - V_1).$$

Or, comme il ne peut y avoir d'accumulation d'électricité dans le triangle, on a

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

d'où

$$P = I_2 V_2 + I_1 V_1 + I_3 V_3,$$

ou, V_0 étant le potentiel de la terre,

$$P = I_1 (V_1 - V_0) + I_2 (V_2 - V_0) + I_3 (V_3 - V_0).$$

Cette formule étant identique à celle d'où nous sommes partis pour le montage en étoile, il en résulte que l'on aura encore la même for-

Digitized by Google

mule de la puissance moyenne, savoir :

$$P_m = \sqrt{3}\, I_{eff} U_{eff} \cos\varphi,$$

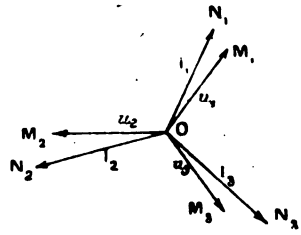
$\cos\varphi$ étant le facteur de puissance.

Pour préciser la signification de l'angle φ, considérons le diagramme des voltages et des intensités.

Soient :

OM_1, OM_2, OM_3 les vecteurs représentant les voltages $V_1 - V_0$, $V_2 - V_0$, $V_3 - V_0$ et ayant pour modules les valeurs efficaces de ces quantités, c'est-à-dire $M_1 O \mathrel{\hat{=}} OM_1$, etc., si l'on compare les figures 89 et 91 ;

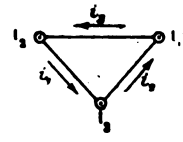
Fig. 91.



ON_1, ON_2, ON_3 les vecteurs représentant les intensités I_1, I_2, I_3 des trois conducteurs de ligne avec la même convention pour les modules.

Je considère les vecteurs $M_3 M_2$, $M_1 M_3$, $M_2 M_1$, ils représenteront les voltages $V_2 - V_3$, $V_3 - V_1$, $V_1 - V_2$ respectivement, que j'appelle tensions composées et que je désigne par $+U_1$, $+U_2$, $+U_3$. Je considère de même les vecteurs $N_3 N_2$, $N_1 N_3$, $N_2 N_1$, ils représenteront

Fig. 92.



les intensités $I_2 - I_3$, $I_3 - I_1$, $I_1 - I_2$. Et je poserai

$$+J_1 = I_2 - I_3, \qquad +J_2 = I_3 - I_1, \qquad +J_3 = I_1 - I_2.$$

On remarquera que, si φ est l'angle de OM_1 avec ON_1, $M_2 M_3$ fera de même un angle égal à φ avec $N_2 N_3$.

Digitized by Google

Or, on a, en appelant i_1, i_2, i_3 les courants qui circulent dans le triangle de I_2 vers I_3, de I_3 vers I_1, de I_1 vers I_2 :

$$i_2 - i_1 = I_3, \qquad i_3 - i_2 = I_1, \qquad i_1 - i_3 = I_2;$$

d'où

$$i_2 - i_1 - (i_3 - i_2) = I_3 - I_1$$

ou

$$3i_2 = J_2 + (i_1 + i_2 + i_3).$$

On aura donc, dans le cas du montage en triangle,

$$P = i_1 U_1 + i_2 U_2 + i_3 U_3 = \frac{1}{3}[J_1 U_1 + J_2 U_2 + J_3 U_3]$$

(puisque l'on a :

$$(i_1 + i_2 + i_3)(U_1 + U_2 + U_3) \equiv 0,$$

la somme des trois U étant nulle).

D'où

$$P_m = J_{eff} U_{eff} \cos\varphi.$$

Mais on a

$$J_{eff} = \sqrt{3}\, I_{eff}.$$

D'où, comme précédemment,

$$P_m = \sqrt{3}\, I_{eff} U_{eff} \cos\varphi.$$

Donc φ est le décalage qui existe, dans les deux cas, entre la différence de potentiel et le courant correspondant (I_1 et $V_1 - V_0$ dans un cas; J_1 et $V_2 - V_3$ dans l'autre).

Pour terminer, appliquons l'équation de Kirchhoff : $\Sigma(ri - E) = 0$ au contour du triangle; nous aurons

$$r_1 i_1 + l_1 \frac{di_1}{dt} - e_1 + r_2 i_2 + l_2 \frac{di_2}{dt} - e_2 + r_3 i_3 + l_3 \frac{di_3}{dt} - e_3 = 0.$$

Si l'on a la condition de symétrie

$$r_1 = r_2 = r_3,$$
$$l_1 = l_2 = l_3,$$

et si les forces contre-électromotrices e_1, e_2, e_3 sont triphasées, de sorte qu'on a

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

Digitized by Google

il restera

$$\left(r_1 + l_1 \frac{d}{dt}\right)(i_1 + i_2 + i_3) = 0;$$

ou bien, si i_1, i_2, i_3 sont purement périodiques,

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

On aura, dans ces conditions,

$$3i_1 = J_1, \qquad 3i_2 = J_2, \qquad 3i_3 = J_3,$$

et φ sera le décalage entre le courant i_1 et la tension composée U_1 correspondante.

CAPACITÉS EN COURANT ALTERNATIF.

Considérons une branche AB reliée à une source de courant alternatif et contenant un condensateur.

Soient :

v_A, v_B les potentiels des points A et B, $u = v_A - v_B$;
q la charge de l'armature reliée à la borne A;
i le courant de charge;
r, c la résistance et la capacité de la branche.

On a, pour équations du mouvement de l'électricité,

$$(1) \qquad v_A - v_B = ri + \frac{q}{c} \qquad \left(i = \frac{dq}{dt}\right).$$

En notation vectorielle, si k est le vecteur unité perpendiculaire au plan des quantités vectorielles représentatives des quantités périodiques, on aura, en appelant ω la pulsation, et désignant les quantités vectorielles par de grandes lettres, avec la convention que leurs modules mesurent les valeurs efficaces :

$$(2) \qquad U = rI + \frac{Q}{c}, \qquad I = \omega[kQ], \qquad Q = -\frac{1}{\omega}[kI];$$

d'où

$$(3) \qquad (UI) = rI^2 + \frac{1}{c}(QI).$$

Mais Q et I sont rectangulaires, d'où

$$(QI) = 0,$$

Digitized by Google

et il reste

$$(UI) = rI^2 \tag{5}$$

ou

$$u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos(u, i) = r i_{\text{eff}}^2. \tag{6}$$

C'est l'expression de la puissance.

On a, de même,

$$[UI] = r[I^2] + \frac{1}{c}[QI], \tag{7}$$

mais on a

$$[I^2] = 0, \qquad \big[Q[kQ]\big] = kQ^2 - Q(kQ) = kQ^2. \tag{8}$$

Donc (7) devient

$$[UI] = k \times 2\omega \times \frac{1}{2c} Q^2. \tag{9}$$

Or, on a

$$[UI] = k u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \sin(\overrightarrow{iu}) \tag{10}$$

ou

$$u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \sin(iu) = 2\omega \times \frac{1}{2c} q_{\text{eff}}^2. \tag{11}$$

C'est l'expression de la puissance réactive.

J'emploierai maintenant la notation imaginaire, qui est plus simple quand il ne s'agit pas de calculs d'énergie.

Si l'on emploie la notation imaginaire, on aura, au lieu des équations (2),

$$U = rI + \frac{Q}{c} \qquad (I = \omega Q\sqrt{-1}), \tag{12}$$

d'où

$$U = \left(r + \frac{1}{c\omega\sqrt{-1}}\right) I. \tag{13}$$

Donc, la résistance imaginaire de la branche est

$$r + \frac{1}{c\omega\sqrt{-1}}.$$

S'il n'y avait pas de résistance ohmique et que le condensateur fût

Digitized by Google

parfait, comme c'est le cas pour les condensateurs à air ordinaires, on aurait pour résistance apparente du condensateur

$$\frac{1}{c\omega\sqrt{-1}}.$$

Mais on constate que l'angle de phase, au lieu d'être pour le courant de 90° en avance sur la différence de potentiel, n'est en avance que d'un angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$, résultat qui serait également produit par la résistance r en série, si l'on avait

$$\varphi = \omega c r. \tag{14}$$

On aura alors, en effet, si φ est très petit,

$$\frac{1}{c\omega\sqrt{-1}} e^{\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1}{c\omega\sqrt{-1}}(1 + \varphi\sqrt{-1}) = \frac{1}{c\omega\sqrt{-1}} + r. \tag{15}$$

On pourrait aussi imaginer que la résistance complexe du condensateur fût, δ étant très petit,

$$\frac{1}{c\omega\sqrt{-1} + \delta} = \frac{1}{c\omega\sqrt{-1}} + \frac{\delta}{c^2\omega^2}, \tag{16}$$

à condition de prendre

$$\delta = c^2\omega^2 r = \omega c \varphi. \tag{16 bis}$$

Enfin, on pourrait attribuer le décalage constaté à une perte s à l'intérieur du diélectrique.

En effet, considérons un condensateur shunté; soient i' le courant dans le shunt, et i'' le courant de charge. On aura

$$u = si' = \frac{q}{c}, \qquad i'' = \frac{dq}{dt}. \tag{17}$$

Les équations vectorielles deviennent, avec la notation imaginaire,

$$\mathrm{U} = s\mathrm{I}' = \frac{\mathrm{Q}}{c}, \qquad \mathrm{I}'' = \omega \mathrm{Q}\sqrt{-1}. \tag{18}$$

Si l'on remplace le condensateur shunté par une branche unique équivalente, on aura

$$i = i' + i'', \qquad \mathrm{I} = \mathrm{I}' + \mathrm{I}'', \tag{19}$$

Digitized by Google

et par suite

$$U = \frac{I'}{\frac{1}{s}} = \frac{I''}{\omega c\sqrt{-1}} = \frac{I}{\frac{1}{s} + \omega c\sqrt{-1}}. \tag{20}$$

Si l'on compare les formules (20) et (16), on voit la signification physique de δ; ce serait la conductibilité du shunt équivalent à la perte.

Comme les conductibilités s'ajoutent, comme on a, par exemple :

$$\begin{cases} U(\delta' + \omega c'\sqrt{-1}) = I', \\ U(\delta'' + \omega c''\sqrt{-1}) = I'', \\ U(\delta''' + \omega c'''\sqrt{-1}) = I''', \end{cases} \tag{21}$$

et, pour la branche unique équivalente

$$U(\Sigma\delta + \omega\sqrt{-1}\,\Sigma c) = \Sigma I, \tag{22}$$

si l'on a plusieurs branches de condensateurs en parallèle, on voit que les δ s'ajoutent, comme les capacités c.

Et l'on aura pour le décalage total (d'après 16 *bis*)

$$\varphi = \frac{c'\varphi' + c''\varphi'' + c'''\varphi'''}{c' + c'' + c'''}. \tag{23}$$

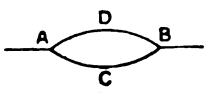
COURANTS ALTERNATIFS.

Entre les deux points A et B d'un réseau, nous avons deux branches de résistance

$$a + b\sqrt{-1}, \qquad a' + b'\sqrt{-1}$$

en notation imaginaire.

Fig. 93.



On peut les remplacer par une branche unique $m + n\sqrt{-1}$ de même conductibilité. On aura donc

$$\frac{1}{m + n\sqrt{-1}} = \frac{1}{a + b\sqrt{-1}} + \frac{1}{a' + b'\sqrt{-1}}. \tag{1}$$

Digitized by Google

Le calcul de m et n n'offrirait aucune difficulté; mais voyons le cas où le circuit fermé ACBD est réglé à la résonance. Sa résistance totale imaginaire est

$$a + a' + (b + b')\sqrt{-1},$$

et, dans le cas de la résonance, elle doit se réduire à la résistance ohmique $a + a'$. On a donc

$$b + b' = 0. \tag{2}$$

Remarquons alors, tout d'abord, que si l'on a

$$a = a' = 0,$$

la conductibilité résultante est nulle. Aucun courant ne passera. Seuls passeraient les courants qui auraient une pulsation différente. On appelle cet effet l'*effet de bouchon*.

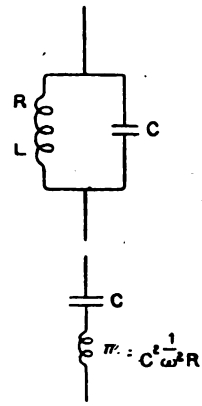
D'une façon générale, l'équation (1) deviendra, sous la condition (2),

$$m + n\sqrt{-1} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(a' - b\sqrt{-1})}{a' + a}$$

ou

$$m = \frac{aa' + b^2}{a' + a}, \qquad n = \frac{a' - a}{a' + a} b.$$

Fig. 94.



Un cas particulier intéressant est celui où l'on a

$$a + b\sqrt{-1} = R + L\omega\sqrt{-1},$$
$$a' = 0, \qquad b' = -\frac{1}{C\omega}$$

Digitized by Google

avec

$$\omega^2 CL = 1.$$

Il vient alors

$$n = -b = +b' = -\frac{1}{C\omega},$$

$$m = \frac{1}{C^2\omega^2 R}.$$

On voit que l'ensemble des deux branches est équivalent à une branche simple coupée par le même condensateur, avec une résistance m en série (*fig.* 94).

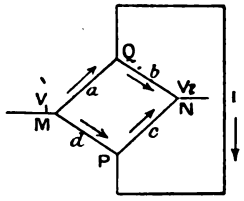
Cette propriété est souvent très utile pour simplifier un diagramme au point de vue du calcul.

DISPOSITIF DE BOUCHEROT.

Dans le diagramme en pont de la figure ci-contre, on a

$$V_1 - V_2 = a I_a + b I_b, \tag{1}$$

Fig. 95.



I_a et I_b étant les courants dans les branches dont les résistances imaginaires sont a et b.

On a donc, en appelant I le courant dans la diagonale QP,

$$I = I_a - I_b,$$

d'où

$$V_1 - V_2 = a I + (b + a) I_b. \tag{2}$$

On aurait de même

$$V_1 - V_2 = d I_d + c I_c.$$

$$I = I_c - I_d,$$

d'où

$$V_1 - V_2 = c I + (c + d) I_d. \tag{3}$$

Digitized by Google

Si donc on fait

$$b + a = 0, \qquad c + d = 0; \tag{4}$$

I devient indépendant de la résistance imaginaire de la branche QP, ce qui est un résultat paradoxal.

En réalité, on peut bien, dans les branches a et b, compenser la self-inductance et la capacité, de même dans les branches c et d, mais on ne peut annuler la résistance ohmique des inductances.

Faisons alors

$$a = r + L\omega\sqrt{-1}, \qquad c = r + L\omega\sqrt{-1},$$

$$b = \frac{1}{C\omega\sqrt{-1}}, \qquad d = \frac{1}{C\omega\sqrt{-1}},$$

$$LC\omega^2 = 1.$$

On aura simplement

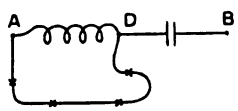
$$V_1 - V_2 = (r + L\omega\sqrt{-1})\,I + r\,I_b, \qquad I_b = I_d.$$

Le résultat sera sensiblement le même que précédemment, si r est petit.

En 1898, M. Boucherot montrait la réalisation de ce schéma.

La source de courant était un transformateur donnant 1000 volts d'une façon à peu près constante au secondaire et dont le primaire était relié au secteur de la Rive Gauche, la bobine de self-induction et le condensateur étaient établis pour fournir un courant constant de un demi-ampère. On pouvait voir, soit par l'éclat des lampes, soit par un ampèremètre, que le courant était pratiquement constant, soit qu'il allumât une lampe, soit qu'il en allumât dix-huit. Les lampes étant de 100 volts, il y avait de 100 à 1800 volts aux bornes du circuit

Fig. 96.



d'utilisation. On voit que l'intensité restait constante, même quand le voltage aux bornes du circuit d'utilisation dépassait celui de la source.

En plaçant une petite bobine de self-induction en dérivation sur une, deux, trois ou quatre lampes, leur éclat n'était pas sensiblement

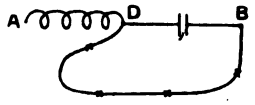
Digitized by Google

changé; cependant, en enlevant une de ces lampes, tout le courant passait dans la petite bobine, puisque les autres lampes continuaient à éclairer.

M. Boucherot est revenu récemment sur la question.

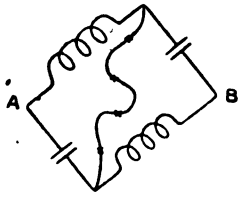
Il rappelle d'abord, par les trois figures ci-après, quelques montages

Fig. 97



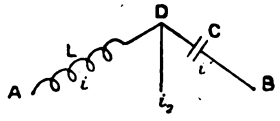
ayant la propriété de donner, en alternatif, un courant constant avec une tension constante.

Fig. 98.



« Considérons, dit-il, un montage incomplet.

Fig. 99.



» Soient u la différence de potentiel instantanée entre A et B; i, i', i_2 les trois courants instantanés dans les branches AD, DB et dans la branche d'utilisation aboutissant en D.

» On a

$$i = i_2 + i',$$

et si l'on remarque qu'une capacité c est équivalente, en alternatif, à une self-inductance négative $-\frac{1}{\omega^2 C}$, on a, d'autre part, pour les tensions :

$$u_1 = L\frac{di}{dt} - \frac{1}{\omega^2 C}\frac{di'}{dt} = L\frac{di_2}{dt} + \left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)\frac{di'}{dt},$$

Digitized by Google

ce qui se réduit à

$$u_1 = L\frac{di_2}{dt},$$

si la condition de résonance

$$\omega^2 LC = 1$$

est remplie.

» Passons aux valeurs efficaces.

$$U_1 = \omega L I_2$$

ou

$$I_2 = \frac{U_1}{\omega L}.$$

Donc, I_2 est constant, si U_1 est constant. »

Digitized by Google

CHAPITRE XXIII.

PROPAGATION DES ONDULATIONS ÉLECTRIQUES PRODUITES PAR UN DIPÔLE OU DOUBLET.

Je vais, dans ce Chapitre, donner la solution proposée par Hertz pour les équations du champ électrodynamique.

En examinant comment ce champ se comporte à l'origine, on voit qu'il peut être considéré comme produit par un centre d'ébranlement constitué en forme de doublet.

Je montre d'ailleurs que la solution envisagée convient au cas où le plan transversal de symétrie du doublet n'est autre que la surface conductrice du sol.

Je recherche alors quelles sont les conditions aux limites à la surface des conducteurs, d'abord dans le cas où les conducteurs peuvent être considérés comme parfaits, ensuite dans le cas où les oscillations peuvent être considérées comme extrêmement rapides.

Pour l'étude de ce dernier cas, je suppose connue l'intégration des équations du champ hertzien au moyen des formules de Poincaré.

Je montre ensuite qu'une sphère de rayon fini peut produire un champ électromagnétique variable, assimilable à celui d'un doublet, mais qu'alors la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur du rayon de la sphère et que l'amortissement est considérable.

J'étudie enfin le champ aux grandes distances et je calcule l'énergie rayonnée.

Pour terminer, je montre l'influence des selfs d'antenne et des capacités intercalées sur la valeur de la longueur d'onde; je me borne ici à appliquer les formules obtenues dans l'étude de la propagation du courant alternatif, mais en négligeant la résistance et la perte de la ligne, c'est-à-dire du fil d'antenne.

Digitized by Google

ÉMISSION D'ONDES ÉLECTRIQUES. SOLUTION DE HERTZ.

Les équations générales du champ électromagnétique dans un milieu isolant sont les suivantes, où l'on a fait $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, ε et μ étant les pouvoirs inducteurs électrique et magnétique respectivement, où c désigne la vitesse de propagation des ondulations électriques et où H et E sont les vecteurs : champ magnétique et champ électrique respectivement :

$$\text{rot}\,\mathrm{H} = \frac{1}{c^2}\frac{d\mathrm{E}}{dt}. \tag{1}$$

$$\text{rot}\,\mathrm{E} = -\frac{d\mathrm{H}}{dt}. \tag{2}$$

Le rotationnel de H est, en effet, égal à 4π multiplié par le courant; or, dans un isolant, le courant de conduction est nul, il ne reste donc plus, d'après Maxwell, que le courant de déplacement

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathrm{KE}}{4\pi},$$

mais, dans le système électromagnétique, K pour le vide est égal à $\frac{1}{c^2}$, c étant la vitesse de propagation des ondulations électriques dans le vide. D'ailleurs, dans l'air, K a très sensiblement la même valeur que dans le vide.

La seconde équation exprime la loi de l'induction, mais comme on est dans le vide et qu'on fait $\mu = 1$, en adoptant le système électromagnétique, tout se passe comme si le milieu n'était pas polarisable, de sorte que le vecteur champ magnétique et le vecteur induction magnétique se confondent l'un avec l'autre.

Ce que nous voulons, c'est une solution particulière.

Les diverses solutions dépendent évidemment des conditions aux limites.

Au lieu de nous donner tout d'abord ces conditions, nous allons commencer par étudier une solution et nous chercherons ensuite les conditions aux limites auxquelles elle satisfera.

Changeons de variable.

D'après le théorème de Vaschy, on a

$$\mathrm{H} = \text{grad}\,\mathrm{V} + \text{rot}\,\mathrm{A} \tag{3}$$

pour un vecteur quelconque.

Digitized by Google

Ici nous avons un champ qui s'étend à l'infini, et à l'infini E et H sont nuls.

V ne dépend que de div H et par suite grad V est nul.

D'autre part, nous cherchons une solution, non d'un problème de distribution statique, mais de propagation.

Je ne poserai donc pas

$$H = \operatorname{rot} A, \tag{4}$$

mais

$$H = \operatorname{rot} \frac{dU}{dt}, \tag{5}$$

en substituant à la variable A la quantité $\frac{dU}{dt}$, U étant un vecteur que je me réserve de déterminer ultérieurement.

Reportant cette expression dans les équations (1) et (2) du champ électromagnétique, j'obtiens

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot} H - \frac{1}{c^2} E\right) = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot}\left(E + \frac{d^2 U}{dt^2}\right) = 0. \tag{7}$$

Mais ni U, ni E ne contiennent de termes indépendants du temps; la première équation (6) donne donc

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} U = \frac{1}{c^2} E. \tag{8}$$

La seconde (7) indique que l'on a

$$E + \frac{d^2 U}{dt^2} = + \operatorname{grad} W, \tag{9}$$

W étant une fonction scalaire à déterminer, car dire que le rotationnel d'un vecteur est nul, c'est dire qu'il dérive d'un potentiel.

La première équation (8) peut se transformer en faisant application de la règle de calcul

$$\left[\nabla[\nabla A]\right] = \nabla(\nabla A) - (\nabla^2) A \tag{10}$$

et l'on obtient

$$c^2(-\Delta U - \operatorname{grad}\operatorname{div} U) + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = + \operatorname{grad} W \tag{11}$$

Digitized by Google

en écrivant

$$\Delta U \quad \text{pour} \quad (\nabla^2)U,$$
$$-\operatorname{grad}\operatorname{div} U \quad \text{pour} \quad \nabla(\nabla U).$$

Pour satisfaire à cette équation, nous pouvons poser

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U. \tag{12}$$

$$\operatorname{grad}(c^2 \operatorname{div} U + W) = 0. \tag{13}$$

Si l'on se donne une solution U de la première équation, la seconde donnera grad W ; on aura ensuite H en fonction de U, et E en fonction de U et de grad W.

Si l'on n'avait affaire qu'à une seule variable spatiale, on aurait, au lieu de la première équation (12), l'équation

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{d^2 U}{dx^2}, \tag{14}$$

c'est-à-dire l'équation des cordes vibrantes.

Nous avons ici trois variables. L'équation sera donc appelée par nous *l'équation de la propagation*.

Supposons que U ne dépende que de la distance r à un point O, que je prendrai pour origine des axes de coordonnées, alors l'équation se transformera aisément.

Cette équation exprime que la divergence du vecteur

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}$$

a une certaine valeur.

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2 U}{dt^2}.$$

Si U ne dépend que de r, ces trois composantes sont les projections du vecteur

$$\frac{dV}{dr}.$$

Mais comme ce vecteur a la même valeur en tous les points d'une sphère de rayon r, il est commode d'évaluer sa divergence en prenant la différence entre le flux qui sort par la sphère de rayon $r + dr$ et celui qui entre dans la couche d'épaisseur dr par la sphère de rayon r. On aura à diviser ensuite par le volume compris entre ces deux sphères.

Digitized by Google

Ce volume est $4\pi r^2 dr$.

On a ainsi

$$\operatorname{div}\frac{dU}{dr} = \left[\left(\frac{dU}{dr} + \frac{d^2U}{dr^2}\,dr\right)4\pi(r+dr)^2 - \frac{dU}{dr}\,4\pi r^2\right]4\pi r^2\,dr$$

ou

$$\operatorname{div}\frac{dU}{dr} = \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} \tag{15}$$

et l'équation de la propagation devient

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2U}{dt^2}. \tag{16}$$

Changeons de variable, en posant

$$U = \frac{V}{r}, \tag{17}$$

d'où

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{1}{r^2}V + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{2}{r^3}V - \frac{2}{r^2}\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2V}{dr^2},$$

et par suite

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{r}V\right), \tag{18}$$

et comme r ne dépend pas de t, il reste

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2V}{dt^2}; \tag{19}$$

c'est l'équation des cordes vibrantes, d'où la solution connue

$$V = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \varphi\left(t + \frac{r}{c}\right). \tag{20}$$

Le terme en f représente une onde qui se propage à partir de l'origine, tandis que φ représente une onde rétrograde.

Or, nous voulons traiter le problème de l'émission. Nous écrirons donc simplement

$$\begin{cases} U_x = 0, \\ U_y = 0, \\ U_z = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c}\right). \end{cases} \tag{21}$$

Digitized by Google

Dans ces conditions on satisfera pour le vecteur U à l'équation de la propagation, puisque chacune de ses trois composantes individuellement y satisfera.

Comme le vecteur U est toujours parallèle à Oz, $\frac{dU}{dt}$ est toujours parallèle à Oz, mais $\frac{dU}{dt}$ représente le potentiel vecteur. Le potentiel vecteur étant toujours parallèle à Oz, cette solution conviendra donc vraisemblablement au cas où le courant qui engendre le champ a cette même direction, c'est-à-dire où l'antenne est dirigée suivant Oz. Cette vue se précisera plus tard.

Pour simplifier l'écriture, je remplace U_z par Π.

$$\Pi = U_z. \tag{22}$$

On vérifie aisément que l'on a

$$\frac{d\Pi}{dx} = -\frac{x}{r^3} f\left(t-\frac{r}{c}\right) - \frac{x}{cr^2} f'\left(t-\frac{r}{c}\right), \tag{23}$$

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = \frac{3x^2-r^2}{r^5} f\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{3x^2-r^2}{cr^4} f'\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{x^2}{c^2r^3} f''\left(t-\frac{r}{c}\right), \tag{24}$$

ce qui permet de vérifier facilement que Π satisfait bien à l'équation de la propagation.

Le vecteur E est donné par les formules (9) et (13)

$$E = -\frac{d^2U}{dt^2} - c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} U, \tag{25}$$

mais on a

$$\operatorname{div} U = \frac{d\Pi}{dz}, \tag{26}$$

d'où

$$E = -\frac{d^2U}{dt^2} - c^2 \operatorname{grad} \frac{d\Pi}{dz}; \tag{27}$$

or $U_x = U_y = 0$, d'où

$$\left\{\begin{array}{l} E_x = c^2 \dfrac{d^2\Pi}{dx\,dz}, \qquad E_y = c^2 \dfrac{d^2\Pi}{dy\,dz}, \\ E_z = -\dfrac{d^2\Pi}{dt^2} + c^2 \dfrac{d^2\Pi}{dz^2} = -c^2\left(\dfrac{d^2\Pi}{dx^2} + \dfrac{d^2\Pi}{dy^2}\right), \end{array}\right. \tag{28}$$

et de même

$$H_x = \frac{d^2\Pi}{dy\,dt}, \qquad H_y = -\frac{d^2\Pi}{dx\,dt}, \qquad H_z = 0. \tag{29}$$

Digitized by Google

Si on fait

$$\Pi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right), \tag{30}$$

il vient

$$\left\{\begin{aligned} E_x &= \frac{xz}{r^2}\left(\frac{3c^2}{r^3} f + \frac{3c}{r^2} f' + \frac{1}{r} f''\right), \\ E_y &= \frac{yz}{r^2}\left(\frac{3c^2}{r^3} f + \frac{3c}{r^2} f' + \frac{1}{r} f''\right), \\ E_z &= \frac{3z^2 - r^2}{r^5} c^2 f + \frac{3z^2 - r^2}{r^4} c f' + \frac{z^2 - r^2}{r^2} f''. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

$$H_x = -\frac{y}{r}\left(\frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{cr}\right), \qquad H_y = \frac{x}{r}\left(\frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{cr}\right), \qquad H_z = 0. \tag{32}$$

Projetons H sur le rayon vecteur ρ qui est la perpendiculaire abaissée du point considéré sur l'axe des z, il vient

$$H_\rho = 0. \tag{33}$$

Par le point considéré et l'axe des z faisons passer un plan méridien et appelons H_α la projection de H normale à ce plan méridien, nous obtenons

$$H_\alpha = \frac{\rho}{r}\left(\frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{cr}\right). \tag{34}$$

Projetons de même E suivant ρ, nous avons

$$E_\rho = \frac{z\rho}{r^2}\left(\frac{3c^2}{r^3} f + \frac{3c}{r^2} f' + \frac{f''}{r}\right). \tag{35}$$

Projetons E sur la direction normale au plan méridien, il vient

$$E_\alpha = 0. \tag{36}$$

Les trois directions qui sont celle de Oz, celle de ρ et celle de la normale au plan méridien sont trois directions rectangulaires, de sorte que H a pour composantes (32) à (34)

$$(H_z = 0,\ H_\rho = 0,\ H_\alpha)$$

et E a pour composantes (35 et 36)

$$(E_z,\ E_\rho,\ E_\alpha = 0),$$

d'où

$$E_z H_z + E_\rho H_\rho + E_\alpha H_\alpha = 0, \tag{37}$$

Digitized by Google

ce qui montre que les vecteurs E et H sont rectangulaires. De plus, les lignes

$$\frac{dz}{H_z} = \frac{d\rho}{H_\rho} = \frac{\rho\, d\alpha}{H_\alpha} \tag{39}$$

sont des cercles centrés sur l'axe, des parallèles, car on a $dz = 0$ et $d\rho = 0$.

CONDITIONS AUX LIMITES.

Je cherche ce qui se passe à l'origine, puisque l'expression que j'ai adoptée est celle d'une onde sphérique qui se propage à partir de l'origine.

Quand r est très petit, on a sensiblement (éq. 34)

$$H = H_\alpha = \frac{\rho f'}{r^3} = \frac{f'}{r^2}\sin\theta, \tag{40}$$

en appelant θ l'angle du rayon vecteur r avec l'axe Oz.

Or, si un élément de courant Jl se trouvait à l'origine, J étant compté positivement dans le sens Oz, on aurait, d'après la loi de Laplace, conformément aux expériences de Biot et Savart,

$$\frac{Jl\sin\theta}{r^2}$$

pour intensité du champ magnétique et ce champ aurait direction normale au plan méridien dans le sens de rotation de Ox vers Oy (trièdre Est, Nord, Zénith).

Il suffira, pour identifier les deux champs, de poser

$$Jl = f'(t), \tag{41}$$

r étant nul au centre d'ébranlement O.

J'obtiendrai un courant de ce genre si je suppose que le centre d'ébranlement est constitué par deux charges $+q$ et $-q$, situées à une distance l l'une de l'autre; par exemple, nous mettrons l'origine au milieu de leur distance et l'axe des z suivant la droite qui les joint. Ces charges seront, si l'on veut, réparties sur deux petites sphères métalliques reliées l'une à l'autre par un conducteur sans capacité.

Le courant aura alors la même valeur tout le long du fil de jonction; si j'appelle $+q$ la charge de la sphère qui est du côté des z positifs,

Digitized by Google

le courant de charge de cette sphère sera

$$J = \frac{dq}{dt}. \tag{42}$$

On aura donc (éq. 41)

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{l} f'(t) \tag{43}$$

ou bien

$$ql = f(t).$$

Un centre d'ébranlement ainsi constitué est ce qu'on appelle un dipôle de Hertz.

En général, un tel système aura une certaine inductance et par suite on pourra écrire

$$f(t) = A\, e^{-\delta t} \cos \omega t \tag{44}$$

pour exprimer qu'on a une oscillation périodique amortie dont le coefficient d'amortissement est δ et dont la pulsation est ω.

Remarque. — La solution ci-dessus pourrait encore se déduire de l'intégration des équations de Lorentz donnée par Poincaré. *Voir* les formules au Chapitre VIII de notre *Cours d'électricité théorique*. Ce qu'on se donnerait, c'est une charge $\grave{e}$ se déplaçant avec une vitesse U le long de l'axe des z dans le voisinage de l'origine. Le mouvement de l'électron étant donné, les champs électrique et magnétique s'en déduisent au moyen d'expressions en fonction du potentiel retardé.

LE RÔLE DE LA TERRE EN TÉLÉGRAPHIE SANS FIL, DANS LE CAS OÙ ELLE PEUT ÊTRE CONSIDÉRÉE COMME UN CONDUCTEUR PARFAIT.

Dans ce qui précède, nous avons considéré un dipôle isolé dans l'espace.

Tout est symétrique par rapport au plan de symétrie perpendiculaire à l'axe du dipôle; du moins, la force électrique, c'est-à-dire le vecteur E est normal à ce plan. Si, en effet, on fait $z = 0$, on a $E_\rho = 0$, comme on a déjà $E_\alpha = 0$; il ne reste plus qu'une composante E_z.

Ainsi les lignes de flux d'induction électrique aboutissent normalement au plan $z = 0$.

Je dis que c'est la condition qui doit être remplie, si la partie de

Digitized by Google

l'espace située au-dessous de ce plan, c'est-à-dire du côté des z négatifs, est parfaitement conductrice.

Admettons que cela soit démontré, alors le problème traité sera celui de l'émission au moyen d'un dipôle de Hertz dans l'atmosphère au-dessus de la surface du sol, cette surface étant supposée plane et le sol étant supposé infiniment conducteur.

On peut supposer que c'est là une première approximation du problème de la transmission au moyen d'une petite antenne verticale.

Revenons donc au problème des conditions aux limites qui doivent être satisfaites à la surface des corps parfaitement conducteurs.

PROPRIÉTÉS DES CHAMPS ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE A LA SURFACE DES CONDUCTEURS PARFAITS.

Dire qu'un conducteur se comporte comme un conducteur parfait, c'est admettre que le corps n'est pas le siège d'un dégagement de chaleur suivant la loi de Joule. Dans la formule

$$E = \frac{i}{c},$$

où E est le vecteur électrique et i le vecteur courant, la constante $\frac{1}{c}$ doit être supposée égale à zéro.

Par conséquent, l'intégrale de ligne de l'intensité de champ électrique est nulle, le long d'un circuit quelconque tracé à l'intérieur ou à la surface du conducteur.

Mais cette intégrale de ligne est égale (au signe près) à la variation du flux d'induction magnétique.

Donc ce flux demeure constant et, comme il est nul dans l'état d'équilibre, il reste nul si l'on part du repos.

Or, à la surface du conducteur, le petit circuit qu'on peut avoir à considérer est compris dans le plan tangent autour du point de contact et le flux à envisager est la composante normale du flux. Cette composante normale étant nulle, c'est que l'induction magnétique est tangente à la surface.

D'autre part, puisqu'il n'y a pas de dissipation d'énergie à l'intérieur du conducteur, c'est que le vecteur radiant qu'on appelle le *vecteur de Poynting* est tangent à la surface.

Or ce vecteur est perpendiculaire à la fois au vecteur électrique et au vecteur magnétique.

Digitized by Google

Mais au front de l'onde, ou en tout point d'une onde plane, soit directe, soit rétrograde, ou en tout point du champ dans l'exemple que nous venons de traiter (celui du dipôle de Hertz), le champ électrique et le champ magnétique sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Dans ces conditions, le champ électrique est normal à la surface des conducteurs comme étant perpendiculaire à deux droites situées dans le plan tangent, savoir le vecteur induction magnétique et le vecteur de Poynting. Le résultat que nous nous proposions d'obtenir est donc acquis.

CAS DES CONDUCTEURS ORDINAIRES.

Si l'on fait tomber une onde électrique sur une surface conductrice, le calcul montre qu'il y a une absorption énergique et que le champ électrique ne pénètre qu'à une faible profondeur.

Cette profondeur est d'autant plus faible que la période des oscillations est plus grande.

La profondeur ε_n à laquelle l'amplitude est réduite à $\frac{1}{n^{\text{ième}}}$ de sa valeur à la surface est

$$\varepsilon_n = \frac{\log n}{\sqrt{2\pi\mu c\omega}},$$

μ étant la perméabilité magnétique,

c la conductivité,

ω la pulsation.

On voit que la profondeur de pénétration sera très petite, soit que l'on considère la conductivité comme très grande, soit que la fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ soit considérable.

Il revient donc au même, à ce point de vue, de dire qu'on envisage, ou un corps parfaitement conducteur, ou des oscillations extrêmement rapides avec des corps conducteurs ordinaires.

Dans le cas de la télégraphie sans fil, où les oscillations sont supposées de grande fréquence, on peut considérer les corps conducteurs comme parfaitement conducteurs ; les courants de conduction seront alors localisés à la surface des conducteurs et l'électricité sera de même concentrée à leur surface.

A l'intérieur, les champs électrique et magnétique sont nuls.

Pour déterminer les conditions à la surface, on peut avoir recours

Digitized by Google

aux formules par lesquelles Poincaré a donné l'intégration des équations de Lorentz, en fonction du mouvement des électrons.

Le mouvement des électrons permet de déterminer le potentiel vecteur retardé A′ et le potentiel ordinaire retardé ψ'. Les accents indiquent qu'on a affaire non aux potentiels ordinaires, mais aux potentiels retardés.

La solution que nous avons reproduite dans notre *Cours d'électricité* est la suivante :

$$H = \operatorname{rot} A', \tag{45}$$

$$4\pi c^2 D = -\frac{dA'}{dt} + \operatorname{grad}\psi'. \tag{46}$$

Admettons-la.

Donc, pour savoir comment H et D se comportent à la surface des conducteurs parfaits, il suffira d'envisager les discontinuités des dérivées du potentiel newtonien retardé et du potentiel vecteur retardé.

Il y a deux quantités à distinguer : les charges et les courants.

A la surface des conducteurs nous avons la densité de charge superficielle

$$c^2\sigma$$

qui est une quantité scalaire et le vecteur densité superficielle de courant que je représente par τ.

Soit ψ le potentiel dû aux charges de densité $c^2\sigma$. La composante normale

$$-\frac{d\psi}{dn}$$

passe de o à $4\pi c^2\sigma$, quand le point considéré passe de l'intérieur du conducteur au voisinage de la surface du côté du champ. Quant à la composante tangentielle de ψ elle est continue.

Passons maintenant au potentiel retardé ψ'.

Examinons la différence $\psi' - \psi$, elle est l'intégrale de termes de la forme

$$\frac{1}{r}\left[f\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right) - f(x', y', z', t)\right],$$

(x', y', z') étant les coordonnées du point considéré et r sa distance à une des masses, $c^2\sigma$ par exemple. Il ne peut y avoir de discontinuité que si r passe par zéro, mais comme le numérateur s'annule aussi, la différence $\psi' - \psi$ ne subit pas, en réalité, de discontinuité. Donc la discontinuité de ψ' est la même que celle de ψ.

Digitized by Google

Ce que je viens de dire pour le potentiel retardé s'applique à chacune des composantes du potentiel vecteur retardé, *mutatis mutandis*.

Faisons l'application de cette remarque.

Considérons tout d'abord le champ magnétique H. On a

$$\text{(45)} \qquad H = \operatorname{rot} A'.$$

Prenons l'axe des x normal au conducteur et convenons de représenter la discontinuité à la surface d'une quantité quelconque X par $|X|$.

A_x est un potentiel engendré par τ_x.

$-\frac{\partial A_x}{\partial x}$, $-\frac{\partial A_x}{\partial y}$, $-\frac{\partial A_x}{\partial z}$ sont donc les composantes de l'intensité du champ dû aux composantes de τ parallèles à l'axe des x. Au point où l'axe des x traverse la surface, la composante est τ_x et l'on a

$$\text{(47)} \qquad \left|-\frac{\partial A'_x}{\partial x}\right| = \left|-\frac{\partial A_x}{\partial x}\right| = 4\pi\tau_x, \qquad \left|-\frac{\partial A'_x}{\partial y}\right| = \left|-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right| = 0,$$

et de même

$$\left|-\frac{\partial A'_x}{\partial z}\right| = 0.$$

Semblablement A_y et A_z étant dus respectivement à τ_y et τ_z, ce sont seulement les dérivées partielles par rapport à x qui sont discontinues.

Or, on a

$$\text{(48)} \qquad H_x = |H_x| = \left|\frac{\partial A'_z}{\partial y}\right| - \left|\frac{\partial A'_y}{\partial z}\right| = 0;$$

$$\text{(49)} \qquad H_y = |H_y| = \left|\frac{\partial A'_x}{\partial z}\right| - \left|\frac{\partial A'_z}{\partial x}\right| = 4\pi\tau_z;$$

$$\text{(50)} \qquad H_z = |H_z| = \left|\frac{\partial A'_y}{\partial x}\right| - \left|\frac{\partial A'_x}{\partial y}\right| = -4\pi\tau_y.$$

Si ν_e est le vecteur unité dirigé de la surface vers le champ au point considéré, on peut résumer (48), (49), (50) en

$$\text{(51)} \qquad H = 4\pi[\tau\nu_e],$$

les crochets représentant le symbole du produit vectoriel.

Passons au déplacement D.

On a, d'après (46),

$$\text{(52)} \qquad 4\pi c^2 D_x = -\frac{\partial A'_x}{\partial t} - \frac{\partial \psi'}{\partial x},$$

Digitized by Google

ψ est le potentiel des charges $c^2 e$; ψ' est le potentiel retardé. Seule la composante $-\frac{\partial \psi}{\partial x}$ est discontinue. Donc c'est aussi $-\frac{\partial \psi'}{\partial x}$ qui seule sera discontinue, tandis que $-\frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $-\frac{\partial \psi'}{\partial z}$ resteront continues.

Quant à A, c'est un potentiel.

Le potentiel n'éprouve pas de discontinuité à la surface. Il en est de même de A' et de $\frac{dA'}{dt}$.

La discontinuité de D est donc celle de D_x, laquelle est égale à $4\pi c^2 \sigma$, au point considéré.

On a donc, en valeur algébrique,

$$(33) \qquad 4\pi c^2 D = 4\pi c^2 |D| = 4\pi c^2 |D_x| = \left| -\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right| = \left| -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right| = 4\pi c^2 \sigma,$$

et en notation vectorielle

$$(34) \qquad D = \sigma v_c.$$

Donc l'hypothèse que les charges et les courants sont superficiels conduit à ce résultat que l'intensité du champ électrique est normale au conducteur et que l'intensité du champ magnétique est tangentielle et normale au vecteur courant.

Il est à remarquer que, du moment que les discontinuités des potentiels retardés sont les mêmes que celles des potentiels ordinaires, le théorème de Vaschy rend évidentes les conclusions auxquelles nous venons d'arriver.

OSCILLATION DE LA SPHÈRE.

Nous avons obtenu une solution des équations du champ électrodynamique sous la forme des équations (31) et (32).

Examinons le vecteur E et reproduisons ici les composantes

$$(31) \qquad E_z = \frac{3z^2 - r^2}{r^5} c^2 f + \frac{3z^2 - r^2}{r^4} c f' + \frac{z^2 - r^2}{r^3} f'',$$

$$(35) \qquad E_\rho = \frac{z\rho}{r^2} \left(\frac{3c^2}{r^3} f + \frac{3c}{r^2} f' + \frac{1}{r} f'' \right),$$

$$(36) \qquad E_\alpha = 0.$$

Ce sont les composantes suivant trois directions rectangulaires, celles des coordonnées cylindriques.

Comme E_α est nul, le vecteur E est dans le plan méridien.

Digitized by Google

Cherchons la composante du vecteur E suivant la direction qui est dans ce plan méridien perpendiculaire au rayon vecteur r; soit E_t cette composante transversale. E pourra être décomposé en deux composantes rectangulaires, qui sont cette composante E_t et une composante longitudinale E_l dirigée suivant le rayon vecteur.

On a

$$E_t = E_\rho \frac{z}{r} - E_z \frac{\rho}{r} \tag{55}$$

ou

$$E_t = \frac{\rho}{r}\left(\frac{c^2 f}{r^2} + \frac{cf}{r} + f'\right). \tag{56}$$

Déterminons $f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ par la condition que l'on ait

$$\frac{c^2 f}{a^2} + \frac{cf'}{a} + f'' = 0. \tag{57}$$

On satisfera à cette équation en posant

$$f = M e^{-\frac{c}{2a}\left(t - \frac{r}{c}\right)} \cos\left[\frac{\sqrt{3}c}{2a}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \delta\right]. \tag{58}$$

Alors le vecteur E se réduira pour $r = a$ à sa composante longitudinale, c'est-à-dire que E aboutira normalement à la sphère de rayon a.

Donc on aura une solution convenant au cas où la sphère de rayon a est une sphère conductrice.

On a alors un conducteur parfait équivalent à un dipôle ou doublet.

Dans ce cas, le rapport du décrément logarithmique à la pulsation est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\text{pulsation } \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{3}c}{2a}, \text{ décr. log} = \frac{c}{2a}\right)$.

Le système est très amorti.

La longueur d'onde $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ est de l'ordre de grandeur du rayon.

Ce mode de vibration électrique n'est pas le seul dont la sphère soit susceptible.

ÉNERGIE RAYONNÉE PAR UN DOUBLET.

Quand le rayon vecteur r a des valeurs considérables, c'est-à-dire quand le point considéré est très loin de l'origine du centre d'ébran-

Digitized by Google

lement, la valeur (34) de H_α se réduit sensiblement à

$$H_\alpha = \frac{\rho f''}{cr^2} = \frac{f''}{cr}\sin\theta, \tag{59}$$

en posant $\frac{\rho}{r} = \sin\theta$; et H a pour valeur cette valeur même de H_α, puisque H_ρ et H_z sont nuls (éq. 33 et 32).

Si je pose

$$f'(t) = Jl\sin\omega t,$$

ce qui correspond à un mouvement périodique non amorti du dipôle, j'aurai, algébriquement,

$$H = \frac{Jl\omega\sin\theta}{cr}\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{60}$$

La valeur maximum de H à la surface de la terre est

$$\frac{Jl2\pi}{cT}\frac{1}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi Jl}{\lambda}\frac{1}{r}. \tag{61}$$

De même, l'intensité du champ électrique se réduira sensiblement, d'après les équations (31), (35) et (36), à

$$E_z = \frac{z^2 - r^2}{r^3}f', \qquad E_\rho = \frac{z\rho f''}{r^3}, \qquad E_\alpha = 0. \tag{62}$$

La composante longitudinale, qui est dirigée suivant le rayon vecteur r, est nulle parce qu'on a, identiquement,

$$E_z\frac{z}{r} + E_\rho\frac{\rho}{r} = \left(\frac{z^2 - r^2}{r^3}z + \frac{z\rho^2}{r^3}\right)f'' = 0, \tag{63}$$

ρ^2 étant égal à $r^2 - z^2$.

La composante transversale est égale à

$$E_t = E_\rho\frac{z}{r} - E_z\frac{\rho}{r} \tag{64}$$

ou sensiblement, d'après (35) et (31), à

$$E_t = \frac{z\rho}{r^3}\frac{z}{r}f'' - \frac{z^2 - r^2}{r^3}\frac{\rho}{r}f'' = \frac{\rho}{r^2}f'' = cH_\alpha. \tag{65}$$

D'ailleurs E_t est dirigé suivant les θ croissants, de sorte que E, qui se réduit à E_z, est perpendiculaire à H qui se réduit à H_α, et leur orientation est telle que le vecteur de Poynting est dirigé suivant le rayon

Digitized by Google

vecteur dans le sens des rayons croissants. L'énergie est donc rayonnée constamment vers l'infini.

Le vecteur de Poynting est

$$\frac{1}{4\pi}[\mathrm{EH}] \quad \text{ou ici} \quad \frac{1}{4\pi}\frac{l^2\sin^2\theta}{cr^2}f''^2 \text{ algébriquement.}$$

Pour avoir la puissance totale rayonnée, il suffit de calculer l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{1}{4\pi}\frac{l^2\sin^2\theta}{cr^2}f''^2\,2\pi(r\sin\theta)r\,d\theta.$$

Or, on a

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta = \frac{4}{3}.$$

Donc l'énergie totale rayonnée par seconde est

$$\frac{2}{3}\frac{l^2}{c}f''^2.$$

En résumé, dans le voisinage de l'oscillateur, le potentiel scalaire et le potentiel vecteur diffèrent peu des potentiels retardés, et le champ est sensiblement celui que donnent les lois ordinaires de l'électrostatique et de l'induction.

Aux grandes distances, au contraire, le champ en chaque point se présente avec tous les caractères d'une onde plane directe.

LONGUEUR D'ONDES PROPRES D'UNE ANTENNE.

On peut traiter le problème directement ou bien l'on peut s'appuyer sur les résultats obtenus dans l'étude du courant téléphonique sur une ligne homogène terminée par des appareils.

Les appareils sont ici la self d'antenne et, dans certains cas, une combinaison de cette self avec un condensateur, ces éléments étant placés à la base de l'antenne.

Ces appareils peuvent aussi être considérés dans certaines formes d'antennes comme constitués par la capacité terminale à l'extrémité isolée.

Dans presque tous les cas on peut considérer l'antenne comme parfaitement isolée; on peut admettre que la résistance des fils est négligeable, l'antenne se comportant sensiblement comme un conducteur

Digitized by Google

parfait à cause de la petitesse de la pénétration du courant à l'intérieur du métal.

Toutes ces hypothèses sont des hypothèses simplificatrices qui justifient la méthode qui consiste à aborder directement le problème.

Cependant, je partirai ici de la formule (31) du Chapitre XII (p. 199) :

$$(1) \qquad V = \frac{E}{\Delta} Z \left[\sqrt{-1}\, Z_1 \cos a(l-x)\sqrt{-1} + Z \sin a(l-x)\sqrt{-1} \right];$$

$$(2) \qquad \Delta = C\sqrt{-1}\, Z(Z_1 + Z_0) + S(Z^2 - Z_1 Z_0).$$

L'on sera à la résonance et le rapport de V à E, c'est-à-dire du potentiel à la force électromotrice agissante, croîtra au delà de toutes limites, si l'on a

$$(3) \qquad \Delta = 0.$$

[A un autre point de vue, si l'on fait $\omega\sqrt{-1} = p$ et qu'on écrive

$$(4) \qquad \Delta V = EZ \left[\sqrt{-1}\, Z_1 \cos a(l-x)\sqrt{-1} + Z \sin a(l-x)\sqrt{-1} \right],$$

cette formule donnera la solution symbolique du problème du mouvement de l'électricité.

Si l'on fait $E = 0$, l'équation différentielle

$$(5) \qquad \Delta V = 0$$

sera celle des oscillations propres.

Il va sans dire que dans l'équation (5) Δ ne représente pas l'opérateur laplacien; c'est l'expression (2) où l'on a remplacé $\omega\sqrt{-1}$ par $\frac{d}{dt}$, ou par p, suivant la notation d'Heaviside.

On a pour racines de l'équation caractéristique des valeurs imaginaires, de sorte qu'une solution de la forme

$$e^{pt}$$

représente une oscillation amortie.]

Si l'antenne est isolée à son extrémité libre, l'équation $\Delta = 0$ devient ce que devient pour Z_1 infini l'équation

$$C\sqrt{-1}\, Z \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1}\right) + S\left(\frac{Z^2}{Z_1} + Z_0\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad C\sqrt{-1}\, Z + S Z_0 = 0,$$

Digitized by Google

ou

$$Z_0 \frac{\sin al\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} + Z\cos al\sqrt{-1} = 0.$$

Mais on a

$$a = \sqrt{(\rho + \lambda\omega\sqrt{-1})(\sigma + \gamma\omega\sqrt{-1})}$$

avec

$$\rho = \sigma = 0,$$

d'où

$$a = \omega\sqrt{\lambda\gamma}\sqrt{-1}. \tag{7}$$

On a aussi

$$Z = \sqrt{\frac{\rho + \lambda\omega\sqrt{-1}}{\sigma + \gamma\omega\sqrt{-1}}}$$

ou, dans les mêmes hypothèses,

$$Z = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}. \tag{8}$$

Il reste donc

$$\frac{Z_0}{\sqrt{-1}} \operatorname{tang}\omega l\sqrt{\gamma\lambda} = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}. \tag{9}$$

D'une façon générale, on a

$$Z_0 = R_0 + \left(L_0\omega - \frac{1}{C_0\omega}\right)\sqrt{-1}; \tag{10}$$

faisons $R_0 = 0$, à titre de première approximation, car il s'agit de déterminer, non l'amortissement, mais la longueur d'onde; il vient

$$\left(L_0\omega - \frac{1}{C_0\omega}\right)\operatorname{tang}\omega l\sqrt{\gamma\lambda} = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}; \tag{11}$$

d'où deux cas principaux à distinguer, celui où il n'y a qu'une inductance à la base de l'antenne

$$\omega \operatorname{tang}\omega l\sqrt{\gamma\lambda} = \frac{1}{L_0}\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \tag{12}$$

et celui où il n'y a qu'un condensateur qui coupe l'antenne

$$\operatorname{tang}\omega l\sqrt{\gamma\lambda} = -\omega C_0\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}. \tag{13}$$

On pose en général

$$\omega l\sqrt{\gamma\lambda} = \frac{2\pi}{T} l\frac{1}{v} = 2\pi\frac{l}{\Lambda}, \tag{14}$$

Digitized by Google

en appelant

T, la période;

(15) $v = \frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}$, la vitesse de propagation;

(16) $\Lambda = vT$, la longueur d'onde.

L'équation (12) devient

(17) $$\frac{2\pi}{\Lambda}\operatorname{tang} 2\pi\frac{l}{\Lambda} = \frac{L}{L_0 l},$$

en appelant $L = \lambda l$ la *self* de l'antenne elle-même.

On aurait de même, au lieu de (13),

(18) $$\operatorname{tang}\frac{2\pi l}{\Lambda} = -\frac{2\pi}{\Lambda}\frac{C_0 L v^2}{l} = -\frac{2\pi}{\Lambda}\frac{C_0 l}{C},$$

en appelant C la *capacité* de l'antenne elle-même.

Pour se rendre compte de l'influence de L_0, traçons la courbe

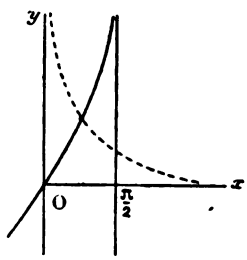
(19) $$y = \operatorname{tang} x \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{2\pi l}{\Lambda}$$

et la courbe (en pointillé, *fig.* 100)

(20) $$y = \frac{L}{L_0}\frac{l}{x}.$$

Cette courbe dépend du paramètre L_0; plus L_0 est grand, plus x est petit pour la même valeur de y.

Fig. 100.



Si L_0 était nul, le premier point de rencontre de ces deux courbes, qui détermine Λ, correspondrait à

$$\operatorname{tang} x = \infty \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \Lambda = \frac{l}{4}.$$

Digitized by Google

Quand x n'est pas nul, l'hyperbole (20) coupe la courbe (19) en un point dont l'abscisse est inférieure à $\frac{\pi}{2}$ et de plus en plus petite à mesure que L_0 croît. Comme A varie en raison inverse de x, on voit que la longueur d'onde augmente en même temps que L_0.

Pour se rendre compte de l'influence de C_0, on peut tracer la même courbe (19) et la droite

$$y = -x\frac{C_0 L}{l}. \tag{21}$$

Ce premier point de rencontre a son abscisse au delà de l'abscisse $\frac{\pi}{2}$ et cette abscisse va en augmentant et en se rapprochant de π au fur et à mesure que C_0 tend vers zéro. Donc l'abscisse du point d'intersection s'éloigne quand C_0 décroît. Donc la longueur d'onde diminue quand C_0 diminue lui-même.

L'introduction d'une inductance à la base de l'antenne a donc pour effet d'augmenter la longueur d'onde.

Une capacité infinie coupant l'antenne ne change pas la longueur d'onde.

Au contraire, une capacité petite la raccourcira.

Si l'antenne est reliée à une source de courant continu, l'emploi d'un condensateur de grande capacité aura la propriété d'empêcher la mise à la terre de la source tout en n'apportant aucune modification à la longueur d'onde. C'est une mesure de sécurité qu'on est parfois amené à prendre.

Dans ce qui précède nous avons considéré le premier point de rencontre d'une hyperbole ou d'une droite avec $y = \operatorname{tang} x$. Mais en réalité cette dernière courbe ayant un nombre infini de branches, on a un point d'intersection et un seul sur chacune d'elles, et il y a par suite une infinité de longueurs d'onde qui tendent, d'ailleurs, à se rapprocher des longueurs d'onde des harmoniques propres de l'antenne, au fur et à mesure que l'on considère des fréquences de plus en plus élevées.

ANTENNE A CAPACITÉ TERMINALE.

Passons maintenant au cas où l'on a $Z_0 = 0$, mais où Z_1 n'est pas infini, par exemple où l'on a

$$Z_1 = -\frac{1}{C_1 \omega}\sqrt{-1},$$

Digitized by Google

c'est-à-dire où l'antenne se termine par une capacité C_1 ramassée en un point.

Reportons-nous à l'équation (2). Si l'on fait $Z_0 = 0$ dans l'équation $\Delta = 0$, il reste

$$C\sqrt{-1}\,Z_1 + SZ = 0, \tag{22}$$

au lieu de l'équation (6), ce qui prouve que l'impédance Z_1 produit le même effet que l'impédance Z_0, pourvu que l'on ait

$$Z_0 = \frac{Z^2}{Z_1} \qquad \text{ou} \qquad Z_0 = \frac{\lambda}{\gamma}\frac{1}{Z_1}. \tag{23}$$

Si Z_1 se réduit à la réactance d'une capacité terminale, comme cela aura lieu pour les antennes en parapluie dont les branches ne sont pas trop longues, on a

$$Z_1 = -\frac{1}{C_1\omega}\sqrt{-1},$$

d'où

$$Z_0 = \frac{\lambda}{\gamma} C_1 \omega \sqrt{-1},$$

de sorte que la capacité terminale de C_1 produit le même effet d'allongement de la longueur d'onde qu'une inductance

$$L_0 = \frac{\lambda}{\gamma} C_1$$

qui serait placée à la base de l'antenne.

Une capacité terminale joue donc le même rôle qu'une inductance à la base de l'antenne.

On pourrait objecter à ces derniers calculs qu'ils sont basés, non sur les équations du champ hertzien, mais sur les équations ordinaires de l'induction électromagnétique. Cependant, les résultats doivent être sensiblement exacts. J'ai fait remarquer en effet que les potentiels retardés diffèrent peu du potentiel scalaire et du potentiel vecteur quand on en est aux petites distances. Au voisinage de l'antenne, par conséquent, les équations ordinaires de l'électrotechnique doivent suffire.

Et ainsi se justifie l'explication que M. Joubert donnait au fonctionnement de l'oscillateur de Hertz. Les lignes de force électriques ou magnétiques qu'il traçait au voisinage de l'excitateur ne différaient

Digitized by Google

pas sensiblement de celles que pouvaient produire des charges statiques sur les boules et un courant permanent dans les tiges et l'éclateur.

Mais aux grandes distances les ondes se comportent comme des ondes planes de mouvement direct. Il n'y a pas d'onde rétrograde. Et il faut recourir aux équations générales de la propagation dans l'espace.

Digitized by Google

MESURES DES CONSTANTES SPÉCIFIQUES D'UNE LIGNE.

Un pont de mesure quelconque suffit, s'il permet les mesures en courant alternatif et si l'on a à sa disposition un générateur de courant alternatif de fréquence convenable, des condensateurs et des bobines d'inductance étalonnés ou gradués. Une fois obtenues les données de la mesure $Z_{(0)}$ et $Z_{(\infty)}$, le calcul se réduit avec la règle à calcul à quelques lignes et s'exécute en quelques minutes. C'est ce que montre l'exemple suivant, dans lequel les formules générales et le calcul d'une mesure figurent à côté l'un de l'autre.

$$Z_{(\infty)} = Z\frac{e^{al}+e^{-al}}{e^{al}-e^{-al}};$$

$$Z_{(0)} = Z\frac{e^{al}-e^{-al}}{e^{al}+e^{-al}};$$

$$Z = \sqrt{Z_{(0)}\,Z_{(\infty)}};$$

$$\frac{e^{al}-e^{-al}}{e^{al}+e^{-al}} = \sqrt{\frac{Z_{(0)}}{Z_{(\infty)}}} = h;$$

$$e^{2al} = \frac{1+h}{1-h};$$

$$al = \frac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h};$$

$$\rho + \omega\lambda\sqrt{-1} = aZ;$$

$$\sigma + \omega\gamma\sqrt{-1} = \frac{a}{Z};$$

$$a = \alpha\sqrt{-1} + \beta;$$

β = coefficient d'affaiblissement.

$$Z_{(\infty)} = 613\,e^{-88^\circ,2\sqrt{-1}};$$

$$Z_{(0)} = 306\,e^{+80^\circ,4\sqrt{-1}};$$

$$Z = 433\,e^{-3^\circ,9\sqrt{-1}};$$

$$h = 0,706\,e^{+84,3\sqrt{-1}} = 0,070 + 0,703\sqrt{-1};$$

$$\frac{1+h}{1-h} = \frac{1,070+0,703\sqrt{-1}}{0,930-0,703\sqrt{-1}} = 1,214\,e^{+85^\circ,6\sqrt{-1}};$$

$$al = 0,605\sqrt{-1} + 0,0466;$$

$$l(\rho+\omega\lambda\sqrt{-1}) = 263\,e^{+81^\circ,7\sqrt{-1}} = 37,9 + 260\sqrt{-1},$$

$$l(\sigma+\omega\gamma\sqrt{-1}) = 0,001\,404\,e^{+89^\circ,5\sqrt{-1}};$$

$$l = 3^{km},575;$$

$$\rho = 10,6, \qquad \lambda = 0,0104;$$

$$\gamma = 0,0564.10^{-6};$$

$$\beta = 0,0131.$$

Digitized by Google

FORMULES PRINCIPALES.

Pages.

7. $$[C[AB]] = A(BC) - C(AB).$$

9. $$\nabla f = \operatorname{grad} f.$$

10. $$\nabla r = \frac{r}{r}, \qquad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} r.$$

11. $$\Delta \frac{1}{r} = 0.$$

13. $$F(x + ht) \equiv e^{ht \frac{\partial}{\partial x}} F(x) \qquad \text{(Tait, Heaviside).}$$

13. $$\int_S A_\nu \, dS = \int_U \operatorname{div} A \, d\varpi \qquad \text{(Ostrogradski).}$$

14. $$\int_C (A \, ds) = \int_S (\nu \operatorname{rot} A) \, dS \qquad \text{(Stokes).}$$

15. $$E_p = \operatorname{grad}_p V.$$

16. $$F = [iH] \, d\varpi.$$

17. $$F = \operatorname{rot} A; \qquad H = \operatorname{grad} V + \operatorname{rot} A \qquad \text{(Vaschy).}$$

21. $$\delta A = dt \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \omega \operatorname{div} A + \operatorname{rot} [A \omega] \right).$$

24. $$\operatorname{rot} H = 0, \qquad \operatorname{div} B = 0.$$

25. $$I = \frac{B - H}{4\pi}.$$

30. $$B = \mu H.$$

33. $$Q = \int \left(\frac{k E \nu}{4\pi} \right) dS; \qquad D = \frac{k E}{4\pi} \qquad \text{(Maxwell).}$$

34. $$e = \operatorname{div} D.$$

38. $$C = c(E + E') \qquad \text{(Ohm).}$$

39. $$\operatorname{rot} E' = -\frac{dB}{dt}.$$

44. $$C = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} H; \qquad \operatorname{rot} E = 0; \qquad \operatorname{div} D = e.$$

45. $$4\pi\sigma = (\nu E).$$

46. $$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi.$$

47. $$c = \frac{1}{\sqrt{k_0 \mu_0}}; \qquad c = 3.10^{10} \text{ cm : sec.} \qquad \text{(Maxwell).}$$

Digitized by Google

Pages.

51. $$\operatorname{div} C = 0.$$

53. $$A = \int \frac{C\, d\varpi}{r}; \qquad H = \operatorname{rot} A.$$

56. $$\mathcal{E} = iR \quad \text{(Ohm)}.$$

57. $$dF = Ee\, d\varpi.$$

60. $dF = [CH]\, d\varpi$ (Ampère); $\qquad dF = e[UH]\, d\varpi$ (Rowland, Lorentz).

65. $$S = C + \frac{dD}{dt}.$$

66. $$it = -Q \quad \text{(Faraday)}.$$

68. $$4\pi S = \operatorname{rot} H.$$

69. $$i = i_0 e^{-\frac{t}{CR}}.$$

70. $$4\pi CR = k\rho.$$

79. $$\operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{e}\frac{dH}{dt}, \qquad \operatorname{rot} H = \frac{\varepsilon}{c}\frac{dE}{dt}.$$

80. $$\operatorname{rot} H = 4\pi\left(\frac{dD}{dt} + eU\right); \quad -4\pi c^2 \operatorname{rot} D = \frac{dH}{dt}; \quad \operatorname{div} D = e; \quad \operatorname{div} H = 0.$$

81. $$S = \frac{dD}{dt} + eU \quad \text{(Lorentz)}.$$

83. $$dW = 4\pi c^2 (D^2)\, d\varpi; \qquad dW = \frac{\varepsilon}{8\pi c^2}(E^2)\, d\varpi; \qquad dW = \frac{k(E^2)}{8\pi}\, d\varpi.$$

86. $$d\mathfrak{C} = d\int \frac{\mu}{8\pi}(H^2)\, d\varpi.$$

87. $$4\pi c^2 D = -\frac{dA}{dt} + \operatorname{grad}\psi.$$

88. $\mathcal{E} = 4\pi c^2 De + [UH]e; \qquad c^2[DH]$, vecteur de Poynting.

98. $$[\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^m = \rho^m(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi) \quad \text{(Moivre)}.$$

100. $$e^{\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi \quad \text{(Euler)}.$$

104. $$i = \sqrt{2}\, i_{\text{eff}} \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right); \qquad P_m = i_{\text{eff}}\, e_{\text{eff}} \cos(\varphi - \psi);$$

$$e = \sqrt{2}\, e_{\text{eff}} \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \psi\right); \qquad P_r = i_{\text{eff}}\, e_{\text{eff}} \sin(\varphi - \psi).$$

105. $$\beta T = \log\frac{i}{i'}.$$

109. $$x = A\, e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi); \qquad \frac{d^n x}{dt^n} = A r^n e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi + n\theta),$$

$$\beta = -r\cos\theta, \qquad \frac{2\pi}{T} = \omega = r\sin\theta.$$

Digitized by Google

Pages.

113. $$\int_0^\infty [A\,e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi)]^2\,dt = \frac{A^2}{4\beta}[\sin^2\varphi+\sin^2(\varphi-\theta)]$$

115. $$\operatorname{ch}(a+b)=\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b;$$

$$\operatorname{ch}^2\frac{a}{2}=\frac{1+\operatorname{ch}a}{2};\qquad \operatorname{sh}^2\frac{a}{2}=\frac{\operatorname{ch}a-1}{2}.$$

129. Résistance critique d'apériodicité : $R'=\dfrac{(n\operatorname{sh})^2}{\sqrt{cI}}-R.$

132. Viscosité : $\gamma=6\pi\eta l\left(\dfrac{R}{e}\right)^3$ (amortisseur Curie).

134. $$V_A-V_B=RI_{\overrightarrow{AB}}-E_{\overrightarrow{AB}}.$$

135. Apériodicité : $R>2\sqrt{\dfrac{L}{C}}.$

136. $$\omega=\frac{1}{\sqrt{CL}}\sqrt{1-\frac{CR^2}{4L}};\qquad T=\frac{2\pi\sqrt{CL}}{\sqrt{1-\dfrac{CR^2}{4L}}};$$

$$\beta T=\pi\frac{R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}{\sqrt{1-\dfrac{CR^2}{4L}}}.$$

149. Shunt de protection pour relais $R_1=R,\qquad C=\dfrac{L}{R^2}$ (Breisig).

167. $p=\dfrac{dT}{dq'},\qquad \dfrac{dp}{dt}+\dfrac{dW}{dq}=e_q-\dfrac{1}{2}\dfrac{dJ}{dq'}\quad\left(\dfrac{dT}{dq}=0\right)$ (Lagrange).

170. $$\Sigma P_a=\Sigma P_r=0$$ (Boucherot).

178. $$P_r=2\omega(T_0-W_0).$$

179. $$\beta=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}},\qquad \alpha=\omega\sqrt{CL}.$$

184. $$Ri+L\frac{di}{dt}=-\frac{dV}{ds};\qquad SV+C\frac{dV}{dt}=-\frac{di}{ds}.$$

190. $$\beta^2-\omega^2=-CL\omega^2,\qquad 2\alpha\beta=CR\omega\qquad(s=0).$$

196. $$V=V_0\cos ax\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\,ZI_0\sin ax\sqrt{-1};$$

$$\sqrt{-1}\,ZI=-V_0\sin ax\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\,ZI_0\cos ax\sqrt{-1};$$

$$a^2=(\rho+\omega\lambda\sqrt{-1})(\sigma+\omega\gamma\sqrt{-1});$$

$$Z=\sqrt{\frac{\rho+\omega\lambda\sqrt{-1}}{\sigma+\omega\gamma\sqrt{-1}}}.$$

Digitized by Google

Pages.

198. W = impédance d'une bobine;

$$\cos a' l\sqrt{-1} = \cos al\sqrt{-1} + \frac{\sin al\sqrt{-1}\,W}{2\sqrt{-1}\,Z};$$

$$Z' = Z\sqrt{\frac{\sin al\sqrt{-1}\sqrt{-1}\,Z - \frac{W}{2}(1+\cos al\sqrt{-1})}{\sin al\sqrt{-1}\sqrt{-1}\,Z + \frac{W}{2}(1-\cos al\sqrt{-1})}}.$$

208. $$Z = \sqrt{Z_{(0)}\,Z_{(\infty)}}$$ (di Pirro).

209. $$al = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{\frac{Z_{(0)}}{Z_{(\infty)}}}}{1-\sqrt{\frac{Z_{(0)}}{Z_{(\infty)}}}}.$$

219. $$\beta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_0}}\,\frac{\rho\left(1-\frac{2}{3}\delta_0^2\right)+\rho_0+\lambda_0\frac{\sigma}{\gamma}}{\sqrt{1-\delta_0^2}}$$ (Pleijel).

224. $$\frac{V}{e} = 1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\varepsilon^{-\frac{n^2\pi t}{CRl^2}}$$ (Lord Kelvin).

226. $$\beta\,(\text{coef. de réflexion}) = \frac{1-\frac{Z}{Z_1}}{1+\frac{Z}{Z_1}}.$$

234. $$I = \frac{E}{Z_0} + E\sum\frac{e^{pt}}{p\frac{dZ}{dp}}$$ (Heaviside).

275. $$y - y_0 = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x-x_0}{a}$$ (Bernouilli).

277. $$\frac{\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2a}}{\frac{\alpha}{2a}} = \frac{\sqrt{l^2-\beta^2}}{\alpha}.$$

279. $$1+\mu = \frac{s}{x-x_0};\qquad 1+\tau = \frac{s}{y-y_0}$$ (*cf.* formules de Larose).

280. $$h = \frac{pd^2}{8T_0};\qquad l = d + \frac{8h^2}{3d}.$$

282. $$\frac{p^2d^2}{24}\left(\frac{1}{T_0'^2}-\frac{1}{T_0^2}\right) = \gamma(T_0'-T_0)+\delta(t'-t)$$ (Blondel).

284. $$P = ES\,\frac{l-l'}{l}.$$

288. $$Q = \frac{\pi^2}{l^2}EI$$ (Euler).

Digitized by Google

Pages.

294. $$N' = \frac{N}{1 + \frac{N l^2}{\pi E r^2}} \qquad \text{(Rankine, Navier).}$$

302. $$- m w_s^2 + \frac{T}{a} 4 \sin^2 \frac{s\pi}{2(p+1)} = 0;$$

$$\gamma_r = \Sigma A_s \sin \frac{(r-1)s\pi}{p+1} \cos(w_s t - \varepsilon_s) \qquad \text{(Lord Rayleigh).}$$

305. $$\frac{\cot ql}{ql} = \frac{L_0}{(Ll)}; \qquad f = \frac{ql}{2\pi\sqrt{(Cl)(Ll)}}.$$

307. $$\frac{2\pi l}{\lambda} \operatorname{tang} \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{(Cl)}{C_0}; \qquad \frac{V_1}{V_0} = \frac{1}{\cos \frac{2\pi l}{\lambda}}.$$

309. $$\lambda_{cm} = 2\pi\sqrt{C_{cm} L_{cm}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{CL}.$$

310. $$C_{\mu F} = 9.10^{11} C_{cm}.$$

324. $$\lambda = L' + \frac{l_1}{l_2}\left(L'' - \frac{1}{C\omega^2}\right).$$

325. $$a^2 L' C \omega^2 = 1 \quad \text{(résonance primaire, Blondel);} \qquad l_1 = 4\pi \frac{\pi_1^2}{\mathcal{R}}.$$

326. $$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu}\frac{s}{S}; \qquad \alpha = \frac{n_2}{n_1}.$$

330. $$I^2 = I_w^2 + I_m^2.$$

335. $$E = 2HLV \frac{n}{\pi} \cos \omega t.$$

340. $$L = -\frac{1}{C a^2 \omega^2} + s \quad (s, \text{ fuites}) \qquad \text{(Béthenod).}$$

357. $$\frac{R}{L} - \frac{2}{\sqrt{CL}} < \frac{S}{C} < \frac{R}{L} + \frac{2}{\sqrt{CL}} \qquad \text{(Janet).}$$

362. $$s = \frac{1}{Z}, \qquad Z = \sqrt{L^2 C^2 \omega^4 + [(LS - CR)^2 - 2LC]\omega^2 + (RS+1)^2};$$

$$s = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

377. $$m x'' = - kx - k' x^3.$$

379. $$x = a \cos \omega_1 t + \frac{k' a^3}{4(9\omega_1^2 - \omega^2)} \cos 3\omega_1 t.$$

388. $$\int e\, dt = C r^2\, \delta i \qquad \text{(Vaschy).}$$

394. $$\delta(\beta T) = \frac{2\pi k^2}{\omega} \frac{\beta + \beta'}{2};$$

$$\delta\omega = \frac{k^2}{2}\left(\omega - \frac{\beta^2 + \beta\beta' + \beta'^2}{\omega}\right).$$

Digitized by Google

Pages.

399. $$\Omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{1+k}}, \qquad \Omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{1-k}}.$$

401. $$\beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\frac{1}{1+k}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\frac{1}{1-k}.$$

425. $$\int_0^\infty e^{-2\alpha_1 t}\cos^2\omega_1 t\,dt = \frac{\omega_1^2+2\alpha_1^2}{4\alpha_1(\omega_1^2+\alpha_1^2)};$$

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha_1 t}\sin^2\omega_1 t\,dt = \frac{\omega_1^2}{4\alpha_1(\omega_1^2+\alpha_1^2)}.$$

426. $$\alpha+\alpha_1 = |\omega-\omega_1|\sqrt{\frac{j}{j_r-j}} \qquad \text{(Bjerknès)};$$

$$\delta_1+\delta = \frac{2\pi}{n}|n-n_1|\sqrt{\frac{j}{j_r-j}}.$$

427. $$\sqrt{j} = \sqrt{j_r}\cos\psi; \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{\alpha+\alpha_1}{\omega+\omega_1}.$$

428. $$\delta_1 = \frac{\Delta^2-\Delta'^2 k}{\Delta-\Delta' k}, \qquad \delta = \frac{k\Delta'^2-k\Delta\Delta'}{\Delta-\Delta' k}, \qquad \delta' = \frac{\Delta\Delta'-\Delta^2}{\Delta-\Delta' k} \qquad \text{(Béthenod)}.$$

433. $$\delta+\delta_1 = 2\pi\sqrt{\frac{abd}{1-d}}.$$

434. $$\alpha+\alpha_1 = \sqrt{2ph}.$$

438. $$(-M) = 4\pi\sqrt{Aa}\left[\frac{2}{c}E-\left(\frac{2}{c}-c\right)F\right] \qquad \text{(Maxwell)}.$$

441. $$M = 4\pi a\left(\log\frac{8a}{e}-2\right).$$

444. $$\int_0^{2\pi}\log r\,d\omega = 2\pi\log a \quad \text{ou} \quad 2\pi\log a$$

450. $$L = \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)+2\mu\log\frac{d^2}{a_1 a_2}.$$

454. $$V = \frac{2v_0^2}{\varepsilon}\log\frac{1}{x}+\text{const.}$$

457. $$c+2c' = \log\frac{R^6-b^6}{3aR^3b^2}, \qquad c-c' = \frac{1}{2\log\dfrac{b\sqrt{3}(R^2-b^2)}{a\sqrt{b^4+b^2R^2+R^4}}}.$$

459. $$P = \sqrt{3}\,I_{\text{eff}}\,U_{\text{eff}}\cos\varphi.$$

466. $$\varphi = \frac{c'\varphi'+c''\varphi''+c'''\varphi'''}{c'+c''+c'''}.$$

468. $$m = \frac{1}{C^2\omega^2 R}; \qquad n = -\frac{1}{C\omega}.$$

471. $$I_2 = \frac{U_1}{\omega L} \qquad \text{(Boucherot)}.$$

Digitized by Google

Pages.

477. $$E_x = c^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\, \partial z}, \quad E_y = c^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\, \partial z}, \quad E_z = -c^2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right)$$

$$H_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\, \partial t}, \quad H_y = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\, \partial t}, \quad H_z = 0$$

(Hertz).

482. $$\varepsilon_n = \frac{\log n}{\sqrt{2\pi\mu c\omega}}.$$

488. $$W = \frac{2}{3} \frac{l^2}{c} f''^2.$$

490. $$\left(L_0 \omega - \frac{1}{C_0 \omega} \right) \operatorname{tang} \omega l \sqrt{\gamma\lambda} = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}.$$

493. $$L_0 = \frac{\lambda}{\gamma} C_1.$$

FIN

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION MATHÉMATIQUE.

Pages.

Principes élémentaires du calcul vectoriel. Produit scalaire et produit vectoriel. 2
Volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs 5
Décomposition d'un vecteur en trois composantes de directions données 6
Formule fondamentale $\left[C[AB]\right] = A(BC) - B(CA)$ 7
Sinus du trièdre. Produits de deux déterminants 8
Symboles différentiels : divergence; rotationnel; gradient 9
Laplacien 10
Formule de Taylor. Expression symbolique. Formule de Taylor obtenue par intégration symbolique de l'équation $\frac{\partial}{\partial t} f(x + ht) = \left(\frac{h\partial}{\partial x}\right) f(x + ht)$ d'une onde qui se propage avec la vitesse $-h$ 12
Formule d'Ostrogradski; de Stokes 13
Orientation des axes 14
Loi de Newton; potentiel; gradient 15
Loi de Laplace; potentiel vecteur 16
Théorème de Vaschy. Variation d'un flux de vecteur 17

CHAPITRE II.

LA TRADUCTION MATHÉMATIQUE DES FAITS FONDAMENTAUX DE L'ÉLECTRICITÉ ET DU MAGNÉTISME.

Intensité du champ; induction magnétique; intensité d'aimantation 25
Application du principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Aimantation induite. 29
Perméabilité magnétique. Hystérésis 30
Aimant toroïdal. — Électrostatique 31
Distribution de champ irrotationnelle et solénoïdale 32
Quantité d'électricité. Déplacement 33
Application du principe de l'égalité de l'action et de la réaction 35

CHAPITRE III.

LES LOIS : LOI D'OHM, LOI DE LAPLACE, LOI DE L'INDUCTION.

Loi de l'induction 37
Équivalence des courants et des aimants 40
Propriétés générales du champ électrique 44
Plan d'épreuve 45
Polarisation 46

Digitized by Google

Pages.
Électromètre. Courants permanents 47
Champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parcouru par un courant permanent. 48
Électromagnétisme 50
Vecteur « courant »; conservation du flux 51
Loi de Laplace 53
Loi d'Ohm 54
Force électromotrice 55
Résistance ohmique 56
Influence négligeable d'une inductance sur la mesure d'une décharge balistique. Étude des forces dans le champ électromagnétique 57
Action des aimants sur les courants 58

CHAPITRE IV.

DE LA THÉORIE DE MAXWELL A LA THÉORIE DE LORENTZ.

Théorie du déplacement électrique 63
Loi de Faraday 65
Constante de temps d'un circuit 69
Vérification expérimentale de l'hypothèse du courant de déplacement 70
Équations fondamentales du champ dans le vide absolu 75
Changement d'unités 78
Cas où les charges électriques se déplacent 80
Calcul de l'énergie électrique 81
Calcul de l'énergie magnétique du champ produit par les courants 84
Conservation de l'énergie 85
Remarques particulières. Théorie des deux fluides 88
Unité de la force électrique et de la force magnétique 89
Localisation de l'énergie 90
Rôle du milieu 92
Électromagnétisme et mécanique 93

CHAPITRE V.

FONCTIONS HARMONIQUES SIMPLES.

Fonctions harmoniques simples; leur représentation 95
Théorie des imaginaires 97
Formule de Moivre 98
Formule d'Euler 100
Le cercle en coordonnées imaginaires Transformation homographique 101

CHAPITRE VI.

COURANTS PÉRIODIQUES ET OSCILLATIONS AMORTIES.

Valeur efficace d'un courant alternatif 103
Fonctions périodiques amorties; pseudo-période, phase, coefficient d'amortissement, décrément logarithmique 105
Équation différentielle 108
Dérivée $n^{ième}$. Représentation géométrique des accélérations des divers ordres. 109

Digitized by Google

Pages.
Intégration géométrique de l'équation différentielle des mouvements amortis... 110
Conditions initiales... 112
Énergie d'une décharge amortie; amortissement, sa mesure... 113

CHAPITRE VII.

MÉTHODE DE RÉPÉTITION. SYNCHRONISATION.

Effet d'une impulsion sur un système amorti... 114
Méthode de répétition... 118
Effet d'impulsions synchrones... 119
Effet d'impulsions synchrones de période différente de la pseudo période de mouvement libre... 121

CHAPITRE VIII.

DÉCHARGE OSCILLANTE DU CONDENSATEUR.

Fonctions hyperboliques... 124
Fonctions hyperboliques amorties... 125
Dérivée $n^{ième}$... 126
Équation différentielle... 127
Mouvement du galvanomètre à cadre mobile; condition d'apériodicité... 128
Mouvement de la balance apériodique de précision de Curie... 129
Calcul du frottement des couches gazeuses; viscosité... 130
Décharge oscillante du condensateur; nombre de degrés de liberté du système. 132
Équation différentielle... 135
Discussion du décrement logarithmique; discussion de la fréquence... 136
Solution correspondant à des conditions initiales Q et I données... 137
Mouvement du point figuratif dont les coordonnées sont proportionnelles à la charge et au courant... 140
Expression de l'énergie totale, son amortissement, sa phase... 141
Équations réduites... 142
Étude des diverses constantes... 144
Charge du condensateur sous force électromotrice constante... 147
Protection des contacts d'un relais... 149

CHAPITRE IX.

ÉLECTRO-CINÉTIQUE ET MÉCANIQUE.

Équations du mouvement de l'électricité en régime permanent... 151
Nombre des variables indépendantes... 153
Établissement des équations... 156
Équations exprimées en fonction de la puissance calorifique... 157
Formules réciproques des forces électromotrices en fonction des intensités... 158
Alimentation à courant constant... 160
Dualisme entre deux réseaux différents... 162
Équations générales du mouvement de l'électricité... 165

Digitized by Google

CHAPITRE X.

PUISSANCE ACTIVE ET PUISSANCE RÉACTIVE.

Pages.
Théorème de Boucherot..... 169
Équations de Lagrange. Régime périodique permanent..... 171

CHAPITRE XI.

RECHERCHES DE PUPIN.

Oscillations électriques d'un conducteur linéaire dont la capacité, la self-induc-
tance et la résistance sont réparties uniformément..... 180
Établissement de l'équation des télégraphistes..... 183
Ligne bouclée actionnée par une force électromotrice $E e^{pt}$..... 184
Propagation sur un conducteur pupinisé..... 186
Utilité de la self-inductance..... 189
Discussion de Pupin concernant l'équivalence d'une ligne pupinisée et d'une
ligne homogène..... 191

CHAPITRE XII.

TÉLÉPHONIE ET PUPINISATION.

Courants alternatifs; solution tenant compte des impédances au départ et à
l'arrivée..... 196
Section de ligne coupée en son milieu par une bobine de pupinisation..... 199
Détermination de l'équidistance des bobines..... 204
Ligne en H..... 205
Impédance caractéristique et constante de propagation; leur mesure expérimentale. 207
Signification des constantes de la ligne en H équivalente à une ligne homogène. 209
Détermination de la ligne en H équivalente à une ligne pupinisée, avant et
après la pupinisation..... 210
Calcul de Pleijel pour déterminer l'affaiblissement d'une ligne pupinisée..... 214

CHAPITRE XIII.

CALCUL SYMBOLIQUE. COEFFICIENTS DE RÉFLEXION.
PROPAGATION DU COURANT DANS UN CABLE. DÉVELOPPEMENT DE HEAVISIDE.

Méthode de Heaviside. Câble sous-marin..... 221
Algébrisation..... 222
Coefficients de réflexion..... 224
Ligne de longueur limitée avec force électromotrice en un point intermédiaire.... 227
Ligne isolée à ses deux bouts; effet d'une charge communiquée en un point... 231
Série de Fourier. Sa signification physique..... 233
Théorème du développement de Heaviside..... 234
Équation différentielle à coefficients constants..... 237

Digitized by Google

CHAPITRE XIV.

PROPAGATION DU COURANT.

Pages

Ligne affectée de pertes équidistantes. Force électromotrice constante; régime permanent 244
Formules d'addition d'indices des fonctions récurrentes fondamentales 251
Solution; courant dans le $m^{ième}$ tronçon 253
Passage à la limite; ligne homogène; régime permanent 254
Régime variable précédant le régime permanent 255
Vitesse du front de l'onde 260
Cas d'une ligne à la terre actionnée par une force électromotrice sans résistance intérieure 261
Propagation de la discontinuité initiale de potentiel 263
Racines de l'équation caractéristique 267
Du régime sous force électromotrice constante au régime périodique permanent et inversement. Cas de la force électromotrice variable ramenée à l'un de ces deux cas, par ses harmoniques ou par la superposition de forces électromotrices infiniment petites entrant en jeu successivement 267

CHAPITRE XV.

L'ANTENNE (PARTIE MÉCANIQUE).

La chaînette 271
Application du principe des vitesses virtuelles 273
Intégration 275
Conditions aux limites 276
Tensions au point le plus haut et au point le plus bas 277
Télégraphie sous-marine : mou et touée. Formules de Larose 279
Formules concernant la chaînette; allongement élastique et dilatation thermique. 280
Exemple numérique 283
Compression élastique d'un prisme 284
Formule d'Euler 288
Évaluation de la flèche 289
Application au calcul des pièces longues des pylônes haubannés ou des tours. 292
Formule de Rankine ou de Navier 293

CHAPITRE XVI.

VIBRATIONS ÉLECTRIQUES DE L'ANTENNE.

Oscillations électriques dans un fil d'antenne 295
Corde chargée 297
Analogie électrique de la corde chargée 298
Solution de Lord Rayleigh 301
Détermination de la fréquence propre d'une antenne. Équation des cordes vibrantes. 304
Oscillations le long d'un circuit coupé par une capacité 306
Isolation à l'extrémité de l'antenne, voltage à prévoir 307
Calcul de $\sqrt{CL}$ dans les divers systèmes d'unités 308

Digitized by Google

Pages.
Critique du système dit pratique..... 311
Intégration de l'équation des cordes vibrantes; nécessité de discontinuités du second ordre; leur propagation..... 312

CHAPITRE XVII.

RÉSONANCE PRIMAIRE. ALTERNATEUR A RÉSONANCE.

Théorie de la résonance primaire..... 318
Impédance apparente du primaire..... 322
Symboles de la Commission technique internationale..... 323
Distinction des impédances de fuite ou externes et des impédances internes.... 324
Condition de résonance primaire. Coefficient de self-inductance..... 325
Le transformateur industriel..... 326
Courant watté; courant magnétisant..... 329
Influence du déphasage. Influence des fuites; leur détermination..... 331
Alternateur à résonance..... 333
Réaction d'induit (Blondel)..... 335
Diagramme vectoriel et variation de l'intensité en fonction de l'inductance de réglage..... 338
Alternateur à résonance. Charge; couple; stabilité (Béthenod)..... 340
Emploi du wattmètre..... 341

CHAPITRE XVII.

RÉGIME PÉRIODIQUE D'ÉMISSION DANS LES POSTES A ÉTINCELLES.

Charge du condensateur sous force électromotrice constante..... 346
Régime musical..... 347
Condition de stabilité..... 350
Décharge oscillante du condensateur mal isolé..... 354
Charge du conducteur sous force électromotrice périodique simple..... 357
Régime musical..... 365

CHAPITRE XIX.

GÉNÉRATION DES OSCILLATIONS ENTRETENUES.

Étude générale des équations du mouvement de l'électricité..... 372
Arc chantant..... 382

CHAPITRE XX.

CIRCUITS OSCILLANTS; ACCOUPLEMENT.

Réaction d'un circuit fermé sur un circuit oscillant..... 390
Périodes propres et amortissements d'une antenne excitée indirectement en dérivation.....
Circuit intermédiaire de Stone..... 403
Circuit filtrant..... 405
Système à deux degrés de liberté, sans inductance..... 414

Digitized by Google

CHAPITRE XXI.

AMORTISSEMENT; FORMULE DE BJERKNÈS.

Pages.
Mesure du décrément logarithmique; formule de Bjerknès..... 420
Composition de deux vibrations amorties..... 428
Courbe de résonance..... 432

CHAPITRE XXII.

CAPACITÉ ET INDUCTION.

Coefficient d'induction mutuelle de deux circuits circulaires..... 436
Formule approximative pour deux circuits voisins..... 439
Coefficients d'induction en général. Moyenne distance géométrique..... 441
Self-inductance d'un circuit téléphonique..... 445
Force électromotrice moyenne de self-induction..... 450
Capacité d'un câble triphasé..... 451
Énergie transmise à un récepteur monté en étoile ou en triangle..... 459
Signification du déphasage..... 461
Capacités en courant alternatif (puissance active et réactive)..... 463
Décalage résultant de la mise en parallèle de plusieurs condensateurs..... 465
Mise en parallèle de deux impédances, en courant alternatif..... 466
Effet de bouchon..... 467
Remplacement d'un condensateur, shunté par une impédance, par le même condensateur en série avec une résistance convenable..... 468
Dispositif de Boucherot..... 468

CHAPITRE XXIII.

PROPAGATION DES ONDULATIONS ÉLECTRIQUES PRODUITES PAR UN DIPÔLE.

Émission d'ondes électriques. Solution de Hertz..... 473
Conditions aux limites dans le voisinage de l'origine..... 479
Rôle de la terre en T. S. F. Cas où elle peut être considérée comme un conducteur parfait..... 480
Propriétés des champs électrique et magnétique à la surface des conducteurs parfaits. 481
Cas des conducteurs ordinaires, mais avec des oscillations très rapides..... 482
Oscillation fondamentale de la sphère..... 485
Énergie rayonnée par un doublet..... 486
Longueur d'onde propre d'une antenne..... 487
Antenne à capacité terminale..... 492

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Digitized by Google

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
60288-20

JUIN 14 1921
Digitized by Google

Mod
3-5
Exr 2171

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google